Лекция 8. Пространство-время лептона.

А. А. Кецарис
(20 мая 2004 г.)

В этой лекции мы показываем, что лептонам необходимо поставить в соответствие свое пространство-время и это пространство-время есть алгебра Клиффорда, образующим пространством которой является пространство-время СТО. Для описания пространственно-временной структуры антилептона необходимо ввести обобщенное сопряженное пространство-время и рассматривать его как алгебру Клиффорда. Указанные обобщения связаны с привлечением дополнительных координат в качестве независимых переменных пространства-времени. Собственное пространство-время лептона является алгеброй. Отсюда необходимо следует квантование этого пространства-времени. Соответствующие квантовые постулаты представляют собой уравнения структуры алгебры пространства-времени.

I. ПОЧЕМУ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ НЕОБХОДИМО ОБОБЩИТЬ ДО АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА.

Отправной точкой для дальнейших рассуждений будет по прежнему уравнение Дирака, которое мы запишем в соответствии с применяемым нами алгебраическим подходом для действительного представления алгебры Клиффорда:

$$\left(C^{iA}{}_B\, \partial_i + \frac{m_e\, c}{\hbar}\, C^{0A}{}_B\right) \cdot \psi^B = 0\,.$$

Здесь индексы A, B принимают значения

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123)\,.$$

$C^{0A}{}_B$ – единичная матрица, а $C^{iA}{}_B$ – образующие структурные матрицы, ковариантной алгебры Клиффорда в первом сжатом действительном представлении*.

Согласно алгебраическому подходу индексы A, B, i нумеруют компоненты вектора (базисные векторы и координаты) в пространстве действия, матрицы $C^{iA}{}_B$ – являются образующими структурными матрицами, определяющими умножение базисных векторов:

$$\mathcal{E}^i \circ \mathcal{E}^A = C^{iA}{}_B \cdot \mathcal{E}^B\,.$$

В уравнении Дирака свертка индекса B структурной матрицы с соответствующим индексом волновой функции является совершенно законной, так как эти индексы относятся к векторам одного пространства. Однако, помимо этого в уравнении Дирака индекс i структурной матрицы сворачивается с индексом, нумерующим пространственно-временные координаты x^i, что в общем случае совершенно недопустимо. Мы должны предположить, что либо номер матрицы i нумерует векторы другой природы, либо пространственно-временные векторы принадлежат той же алгебре, что и векторы действия. Первая точка зрения противоречит развиваемому нами алгебраическому подходу, согласно которому матрицы $C^{iA}{}_B$ есть *структурные* матрицы алгебры и индекс i нумерует векторы в *этой* алгебре. Таким образом, нам ничего не остается, как выдвинуть следующий тезис. Пространство-время, рассматриваемое в теории электрона Дирака, необходимо обобщить и рассматривать его как алгебру Клиффорда.

Кроме того, так как структурные матрицы $C^{iA}{}_B$ представляют образующие базисные векторы $\mathcal{E}^i$

$$C^{iA}{}_B \sim \mathcal{E}^i\,,$$

а x^i – есть координаты пространства-времени специальной теории относительности (СТО), то следует считать, что образующим пространством алгебры Клиффорда как обобщенного пространства-времени является пространство-время СТО.

Так как согласно нашему выводу, сделанному в Лекции 5, алгебру Клиффорда следует соотнести определенной физической структуре – лептону, то и рассматриваемое обобщение пространства-времени мы должны отнести к лептону. Таким образом, вводимое нами обобщенное пространство-время не есть пространство-время вообще (без относительно к чему-либо), а это пространство-время, сопутствующее (сотнесенное) лептону. Иногда мы будем говорить о *собственном* пространстве-времени лептона.

Здесь полезно сделать несколько общих замечаний. Вид операторов дифференцирования по пространственно-временным координатам, входящих в установленные фундаментальные уравнения физики, определяет специфику специальной теории относительности и заставляет переходить к новым представлениям о пространственно-временном континууме, формировать специальную теорию относительности в обобщенном смысле. Так уравнения Максвелла выявили роль оператора Даламбера (в описании процесса распространения электромагнитных колебаний). Следствием этого явилась специальная теория

*Смотри раздел V Лекции 5.

относительности Эйнштейна и представление о четырехмерном пространственно-временном континууме. Аналогично уравнения Дирака выявили роль оператора

$$C^{iA}{}_{B} \cdot \partial_i \sim \mathcal{E}^i \cdot \partial_i \,.$$

Следствием этого должно быть обобщение пространства – времени до алгебры Клиффорда, построенной на четырехмерном пространстве – времени как на образующем пространстве. А также разработка соответствующей специальной теории относительности, то есть теории преобразований, сохраняющих пространственно-временные инварианты*.

С нашей точки зрения признаки специфики лептонов следует связать как со структурой вектора действия так и со структурой пространственно-временного вектора.

II. ОБРАЗУЮЩЕЕ ПРОСТРАНСТВО – ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ СТО.

Пространство-время СТО обозначим X и будем рассматривать как векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{K}$. Вектор $x \in X$ запишем через базисные векторы:

$$x = \mathcal{E}_i \, x^i \,,$$

где $i = 1, 2, 3, 4$; $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ есть базисные векторы геометрического пространства, $\mathcal{E}_4$ есть базисный вектор времени, $x^i \in \mathbb{K}$ есть координаты вектора.

На X определено *скалярное произведение* векторов. То есть, каждому вектору $a \in X$ ставится в соответствие линейное отображение вектора $x \in X$ в $\mathbb{K}$, которое записывается следующим образом:

$$\langle a, x \rangle \in \mathbb{K} \,.$$

Скалярное произведение вектора x на себя определяет его *квадрат длины*

$$\langle x, x \rangle = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 \,,$$

который связан с вводимым в СТО *квадратом интервала* s^2 следующим образом

$$\langle x, x \rangle = -s^2 \,.$$

Из двух предыдущих соотношений следует известное из СТО выражение для квадрата интервала, которое мы для удобства последующего изложения запишем в следующем виде

$$s^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 = 0 \,. \tag{1}$$

*Этой теме будет посвящена Лекция 10.

Скалярное произведение базисных векторов определяет *метрический тензор* на X:

$$g_{ik} \equiv \langle \mathcal{E}_i, \mathcal{E}_k \rangle = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & & & \\ 2 & & 1 & & \\ 3 & & & 1 & \\ 4 & & & & -1 \end{array} \,.$$

Обратный метрический тензор g^{ik} определяется условием:

$$g^{ik} \, g_{kl} = \delta^i_{\ l} \,.$$

Введем базисные векторы $\mathcal{E}^i \in X$, для которых потребуем выполнения условия†

$$\langle \mathcal{E}^i, x \rangle = x^i \,.$$

Базисные векторы $\mathcal{E}^i$ называются *сопряженными* по отношению к базисным векторам $\mathcal{E}_i$. Для сопряженных базисных векторов выполняется соотношение:

$$\langle \mathcal{E}^i, \mathcal{E}_k \rangle = \delta^i_{\ k} \,.$$

Сопряженные базисные векторы $\mathcal{E}^i$ связаны с базисными векторами $\mathcal{E}_k$ соотношением:

$$\mathcal{E}^i = \mathcal{E}_k \, g^{ik} \,.$$

Вектору $x = \mathcal{E}_i \, x^i$ поставим в соответствие *сопряженный* вектор

$${}^{+}x = x_i \, \mathcal{E}^i \,,$$

где $x_i = \delta_{ik} \, x^k$ есть координаты сопряженного вектора. Скалярное произведение вектора x на сопряженный ему вектор $\tilde{x}$ равно

$$\langle x, {}^{+}x \rangle = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 \,.$$

Эта квадратичная форма является положительно определенной.

Множество сопряженных векторов составляет векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{K}$, которое обозначим ${}^{+}X$ и назовем *сопряженным пространством-временем.*

†Полезно иметь в виду, что это условие является математической формулировкой физического процесса измерения вектора.

III. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ ЛЕПТОНА КАК АЛГЕБРА КЛИФФОРДА.

Обобщим пространство-время X до алгебры Клиффорда $\mathbb{X}$[‡]. Для этого воспользуемся $\circ$-умножением векторов. И помимо самих векторов x будем рассматривать пары

$$x_1 \circ x_2 \,,$$

тройки

$$x_1 \circ x_2 \circ x_3$$

и в общем случае множество $\circ$-произведений p векторов

$$x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_p \,, \qquad (2)$$

где $x_2, x_2, \ldots, x_p$ также принадлежат X. Векторное пространство, которому принадлежит множество векторов (4) обозначим X^p. Запишем вектор $x \in X^p$ через базисные векторы:

$$x = \mathcal{E}_{i_p \ldots i_2 i_1}\, x^{i_1 i_2 \ldots i_p} \,,$$

где

$$\mathcal{E}_{i_p \ldots i_2 i_1} = \mathcal{E}_{i_1} \circ \mathcal{E}_{i_2} \circ \ldots \circ \mathcal{E}_{i_p} \,.$$

Так как число измерений образующего пространства равно 4, то $p \leq 4$.

Введем векторное пространство

$$\mathbb{X} = X^0 + X^1 + X^2 + X^3 + X^4 \,,$$

где $X^0 = \mathbb{K}$, $X^1 = X$. Наличие на множестве векторов $\mathbb{X}$ операций сложения и $\circ$-умножения делает это множество алгеброй Клиффорда. Вектор $x \in \mathbb{X}$ можно записать через базисные векторы:

$$x = \mathcal{E}_0\, x^0 + \mathcal{E}_i\, x^i + \mathcal{E}_{ij}\, x^{ij} + \mathcal{E}_{ijk}\, x^{ijk} + \mathcal{E}_{1324}\, x^{1324} \,. \quad (3)$$

Здесь единица множества действительных чисел $\mathbb{K}$ обозначена через $\mathcal{E}_0$. Или с использованием собирательных индексов

$$x = \mathcal{E}_I \cdot x^I \,.$$

В соответствии с соображениями раздела I векторное пространство $\mathbb{X}$ есть *пространство-время лептона.*

Напомним, что закон умножения базисных векторов $\mathcal{E}_I$ имеет вид

$$\mathcal{E}_I \circ \mathcal{E}_K = \mathcal{E}_L \cdot {}^{+}C^L{}_{KI} \,, \qquad (4)$$

где ${}^{+}C^L{}_{KI}$ есть структурные постоянные алгебры. В частном случае умножение $\mathcal{E}_I \circ \mathcal{E}_K$ определяет скалярное произведение

$$\langle \mathcal{E}_I, \mathcal{E}_K \rangle = \mathcal{E}_0 \cdot {}^{+}C^0{}_{KI}$$

и метрический тензор $g_{KI} = {}^{+}C^0{}_{KI}$. Метрический тензор в принятой ранее нами последовательности индексов имеет вид

$$g_{KI} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
13 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
0 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
14 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
34 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
2 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
123 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
234 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
124 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ \hline
\end{array}$$

Напомним, также, что ${}^{+}C^L{}_{0I} = {}^{+}C^L{}_{I0} = \delta^L{}_I$.

Скалярное произведение вектора x на себя определяет его *квадрат длины*

$$\langle x, x \rangle = g_{KI}\, x^I\, x^K \,.$$

Из условия ассоциативности умножения в алгебре Клиффорда $\mathbb{X}$ следует регулярное представление базисных векторов $\mathcal{E}_I$:

$$\mathcal{E}_I \sim {}^{+}C^L{}_{KI} \,.$$

При этом вектору x соответствует матрица

$$x \sim x^L{}_K = {}^{+}C^L{}_{KI}\, x^I \,.$$

Алгебра Клиффорда $\mathbb{X}$ является алгеброй с делением, то есть для каждого вектора $x \in \mathbb{X}$ за исключением нулевого определен *обратный* вектор x^{-1} в соответствии с выражением

$$x \circ x^{-1} = \mathcal{E}_0 \,. \qquad (5)$$

Или в координатном виде

$$g_{IK} \cdot x^I\, (x^{-1})^K = 1 \,.$$

Здесь, во избежание путаницы, необходимо сделать следующее замечание. Кватернионы являются частным случаем рассматриваемых векторов. Это векторы вида

$$x = \mathcal{E}_0\, x^0 + \mathcal{E}_{21}\, x^{21} + \mathcal{E}_{13}\, x^{13} + \mathcal{E}_{32}\, x^{32} \,.$$

Кватерниону x можно сопоставить кватернион x^*, называемый *сопряженным*

$$x^* = \mathcal{E}_0\, x^0 - \mathcal{E}_{21}\, x^{21} - \mathcal{E}_{13}\, x^{13} - \mathcal{E}_{32}\, x^{32} \,,$$

[‡]Эта алгебра является частным случаем алгебры $\mathbb{L}_{left}$, введенной в Лекции 7.

для которого выполняется соотношение

$$x \circ x^* = \langle x, x^* \rangle \,.$$

С помощью сопряженного кватерниона легко определяется обратный:

$$x^{-1} = \frac{x^*}{\langle x, x^* \rangle} \,.$$

Можно предположить, что так же (путем изменения знака перед слагаемыми вектора) определяется сопряженный вектор для произвольного вектора алгебры Клиффорда. Однако это не так. В этом можно убедиться, проделав соответствующие вычисления, например, для вектора

$$x = \mathcal{E}_0\, x^0 + \mathcal{E}_1\, x^1 + \mathcal{E}_{32}\, x^{32} + \mathcal{E}_{123}\, x^{123} \,.$$

Поэтому рассмотренный выше "сопряженный"вектор не допускает простое обобщение и дальнейшее определение сопряженного вектора строится иначе.

1. Обобщенное сопряженное пространство-время. Пространство-время антилептона

Для описания пространственной структуры антилептона введем *обобщенное сопряженное пространство – время.* Для этого обобщим сопряженное пространство-время ^+X, введенное в разделе II, до алгебры Клиффорда $^+\mathbb{X}$*

$$^+\mathbb{X} = {}^+X^0 + {}^+X^1 + {}^+X^2 + {}^+X^3 + {}^+X^4 \,,$$

над образующим пространством ^+X аналогично тому, как это было сделано выше. Здесь $^+X^0 = \mathbb{K}$, $^+X^1 = {}^+X$.

Вектор $^+x \in {}^+\mathbb{X}$ можно записать через базисные векторы:

$$^+x = x_0\, \mathcal{E}^0 + x_i\, \mathcal{E}^i + x_{ij}\, \mathcal{E}^{ij} + x_{ijk}\, \mathcal{E}^{ijk} + x_{1324}\, \mathcal{E}^{1324} \,.$$

Или с использованием собирательных индексов

$$^+x = x_I \cdot \mathcal{E}^I \,.$$

Через $\mathcal{E}^0$ обозначена единица множества действительных чисел $\mathbb{K}$. Множество $^+\mathbb{X}$ является алгеброй Клиффорда.

Скалярное произведение векторов пространств X и ^+X обобщается на скалярное произведение векторов пространств $\mathbb{X}$ и $^+\mathbb{X}$. В частности, базисные векторы $\mathcal{E}_{k_n \ldots k_2 k_1}$ и $\mathcal{E}^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ могут быть выбраны так, что

$$\langle \mathcal{E}^{i_1 i_2 \ldots i_n}, \mathcal{E}_{k_n \ldots k_2 k_1} \rangle = \delta^{i_n}_{k_n} \ \ldots \ \delta^{i_2}_{k_2}\, \delta^{i_1}_{k_1} \,.$$

И в общем случае

$$\langle \mathcal{E}^I, \mathcal{E}_K \rangle = \delta^I{}_K \,.$$

Напомним закон умножения базисных векторов $\mathcal{E}^I$:

$$\mathcal{E}^I \circ \mathcal{E}^K = C^{IK}{}_L \cdot \mathcal{E}^L \,,$$

где $C^{IK}{}_L$ есть структурные постоянные алгебры. Проекция произведения $\mathcal{E}^I \circ \mathcal{E}^K$ на направление $\mathcal{E}^0$ определяет скалярное произведение

$$\langle \mathcal{E}^I, \mathcal{E}^K \rangle = C^{IK}{}_0\, \mathcal{E}^0$$

и обратный метрический тензор $\mathrm{g}^{IK} = C^{IK}{}_0$. Заметим также, что $C^{0K}{}_I = C^{K0}{}_I = \delta^K{}_I$.

Напомним, что из условия ассоциативности умножения в алгебре Клиффорда $^+\mathbb{X}$ регулярное представление базисных векторов $\mathcal{E}^I$:

$$\mathcal{E}^I \sim C^{IL}{}_M \,.$$

При этом вектору ^+x соответствует матрица

$$^+x \sim x^L{}_M = x_I\, C^{IL}{}_M \,.$$

Связь между структурными постоянными алгебры $^+\mathbb{X}$ и алгебры $\mathbb{X}$ определяется следующим образом:

$$C^{RQ}{}_P = \delta^{RI} \cdot \delta^{QK} \cdot {}^+C^L{}_{KI} \cdot \delta_{LP} \,. \tag{6}$$

Обратный метрический тензор g^{IK} определяется условием:

$$\mathrm{g}^{IK}\, g_{KL} = \delta^I{}_L \,.$$

Измерение вектора x базисными векторами $\mathcal{E}^I$ дает в результате координаты вектора x^I:

$$\langle \mathcal{E}^I, x \rangle = x^I \,.$$

Сопряженные базисные векторы $\mathcal{E}^I$ связаны с базисными векторами $\mathcal{E}_K$ соотношением:

$$\mathcal{E}^I = \mathcal{E}_K\, \mathrm{g}^{IK} \,.$$

Вектору $x = \mathcal{E}_I\, x^I$ соответствует сопряженный вектор

$$^+x = x_I\, \mathcal{E}^I \,,$$

где $x_I = \delta_{IK}\, x^K$ есть координаты сопряженного вектора. Скалярное произведение вектора x на сопряженный ему вектор ^+x равно

$$\langle x, {}^+x \rangle = \delta_{KI}\, x^I\, x^K \,.$$

Эта квадратичная форма является положительно определенной.

Таким образом, свойства пространства – времени СТО обобщаются в алгебрах Клиффорда $\mathbb{X}$ и $^+\mathbb{X}$.

*Эта алгебра является частным случаем алгебры $^+\mathbb{L}_{left}$, введенной в Лекции 7.

IV. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ КООРДИНАТ В АЛГЕБРЕ КЛИФФОРДА.

Вектор (3) в пространстве – времени лептона $\mathbb{X}$ определяется следующими координатами

- x^i – координаты вектора-отрезка
$$\mathcal{E}_i\, x^i$$
в 4-х мерном пространстве СТО. Они включают в себя
  - ◇ x^a – координаты геометрического вектора-отрезка*
  $$\mathcal{E}_a\, x^a\,,$$
  - ◇ x^4 – координату вектора времени
  $$\mathcal{E}_4\, x^4\,.$$
- x^{ij} – координаты вектора-площади
$$\mathcal{E}_{ij}\, x^{ij}$$
в пространстве СТО. Они включают в себя
  - ◇ x^{ab} – координаты вектора-площади в геометрическом пространстве
  $$\mathcal{E}_{ab}\, x^{ab}\,,$$
  - ◇ x^{a4} – координаты вектора-площади в плоскости $(\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_4)$
  $$\mathcal{E}_{a4}\, x^{a4}\,.$$
- x^{ijk} – координаты вектора-объема
$$\mathcal{E}_{ijk}\, x^{ijk}$$
в пространстве СТО. Они включают в себя
  - ◇ x^{abc} – координаты вектора-объема в геометрическом пространстве
  $$\mathcal{E}_{abc}\, x^{abc}\,,$$
  - ◇ x^{ab4} – координаты вектора-площади в плоскости $(\mathcal{E}_{ab}, \mathcal{E}_4)$
  $$\mathcal{E}_{ab4}\, x^{ab4}\,.$$
- x^{1324} – координаты вектора-4-х мерного объема
$$\mathcal{E}_{1324}\, x^{1324}$$
в 4-х мерном пространстве СТО.
- x^0 – координаты вектора-длины
$$\mathcal{E}_0\, x^0\,.$$

*Напомним, что индексы a, b, c, принимают значения 1,2,3, в отличие от индексов i, j, k,, которые принимают значения 1,2,3,4.

В представленном виде координаты слагаемых векторов имеют разные размерности. Координаты x^0, координаты x^i имеют размерность длины, координаты x^{ij} имеют размерность квадрата длины и координаты x^{ijk} и x^{1324} соответственно третьей и четвертой степени длины. Использование векторов с координатами разных размерностей неудобно, особенно при выполнении умножений. Поэтому целесообразно использование векторов либо с безразмерными координатами

$$x = \mathcal{E}_0\, \frac{x^0}{R} + \mathcal{E}_i\, \frac{x^i}{R} + \mathcal{E}_{ij}\, \frac{x^{ij}}{S} + \mathcal{E}_{ijk}\, \frac{x^{ijk}}{V} + \mathcal{E}_{1324}\, \frac{x^{1324}}{W}\,. \tag{7}$$

либо с координатами одной размерности

$$x = \mathcal{E}_0\, x^0 + \mathcal{E}_i\, x^i + \mathcal{E}_{ij}\, R\, \frac{x^{ij}}{S} + \mathcal{E}_{ijk}\, R\, \frac{x^{ijk}}{V} + \mathcal{E}_{1324}\, R\, \frac{x^{1324}}{W}\,. \tag{8}$$

Последнюю точку зрения следует считать предпочтительной. Во всяком случае опыт СТО, в которой время приведено к пространственной координате путем умножения на постоянную скорость c, демонстрирует удобство такой точки зрения.

Указанные в этих формулах величины

$$R\,, S\,, V\,, W$$

по нашему замыслу должны выражаться через физические константы. Вопрос о том какие значения принимают эти величины пока оставим открытым. Предварительно для электрона мы будем полагать

$$R = \frac{\hbar}{m_e\, c}$$

– радиусу электрона.

В безразмерном выражении (7) вектор образующего пространства СТО имеет вид

$$x = \mathcal{E}_a\, \frac{x^a}{R} + \mathcal{E}_4\, \frac{c\, t}{R}\,.$$

Последнее слагаемое позволяет ввести еще одну постоянную величину

$$T = \frac{R}{c}\,,$$

имеющую размерность времени.

Далее выразим координаты x^{ij}, x^{ijk}, x^{1324} через соответствующие углы и скорости. В таком виде координаты более понятны и удобны для работы с ними.

x^{ab}

– координаты площади в плоскости $(\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_b)$. Площадь x^{ab} можно представить как площадь кругового сектора, ограниченного окружностью, определяемой уравнением

$$r^2 = (x^a)^2 + (x^b)^2 \,.$$

В результате будем иметь

$$x^{ab} = \frac{1}{2}\, r^2\, \varphi^{ab} \,,$$

где φ^{ab}–угол в рассматриваемой плоскости.

За единичную площадь примем $S = \frac{1}{2}\, R^2$. Тогда для координат в относительных единицах получим

$$\frac{x^{ab}}{S} = \frac{r^2\, \varphi^{ab}}{R^2} \,.$$

Вблизи радиуса $r \approx R$ будем иметь

$$\frac{x^{ab}}{S} = \varphi^{ab}$$

и для дифференциалов координат

$$\frac{dx^{ab}}{S} = d\varphi^{ab} \,.$$

Для координат размерности длины имеем

$$dx^{ab} = R\, d\varphi^{ab} \,.$$

x^{a4}

– координаты площади в плоскости $(\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_4)$. Площадь x^{a4} будем рассматривать как площадь гиперболического сектора, ограниченного гиперболой, определяемой уравнением

$$-s^2 = (x^a)^2 - (x^4)^2 \,.$$

В результате будем иметь

$$x^{a4} = \frac{1}{2}\, s^2\, \psi^{a4} \,,$$

где ψ^{a4} – угол гиперболического сектора. И для дифференциала координат

$$dx^{a4} = \frac{1}{2}\, s^2\, d\psi^{a4} \,. \tag{9}$$

Из СТО известно, что гиперболический угол ψ^{a4} связан со скоростью движения. Действительно,

$$\frac{v^a}{c} = \frac{x^a}{x^4} = \frac{\sinh \psi^{a4}}{\cosh \psi^{a4}} = \tanh \psi^{a4} \,.$$

Отсюда для дифференциала $\frac{dv^a}{c}$

$$\frac{dv^a}{c} = \frac{d\psi^{a4}}{\cosh^2 \psi^{a4}} = (1 - \tanh^2 \psi^{a4})\, d\psi^{a4} \,.$$

Выразим отсюда $d\psi^{a4}$

$$d\psi^{a4} = \frac{(x^4)^2}{(x^4)^2 - (x^a)^2}\, \frac{dv^a}{c} \,.$$

Подставляя это выражение в (9), получим

$$dx^{a4} = \frac{(x^4)^2}{2}\, \frac{dv^a}{c} \,.$$

За единичную площадь примем $S = \frac{1}{2}\, R^2$. Тогда для координат в относительных единицах получим

$$\frac{dx^{a4}}{S} = \frac{(x^4)^2}{R^2}\, \frac{dv^a}{c} \,.$$

Вблизи радиуса R мы имеем $x^4 \approx R$ и

$$\frac{dx^{a4}}{S} = \frac{dv^a}{c} \,.$$

Для координат размерности длины имеем

$$dx^{a4} = \frac{R\, dv^a}{c} = T\, dv^a \,.$$

x^{abc}

– координаты объема в геометрическом пространстве $(\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_b, \mathcal{E}_c)$. Объем x^{abc} можно представить как объем шарового сектора, ограниченного сферой, определяемой уравнением

$$r^2 = (x^a)^2 + (x^b)^2 + (x^c)^2 \,.$$

В результате будем иметь

$$x^{abc} = \frac{1}{3}\, r^3\, \varphi^{123} \,,$$

где φ^{123} – телесный угол в рассматриваемом пространстве.

За единичный объем примем $V = \frac{1}{3}\, R^3$. Тогда для координат в относительных единицах получим

$$\frac{x^{abc}}{V} = \frac{r^3\, \varphi^{123}}{R^3} \,.$$

Вблизи радиуса $r \approx R$ будем иметь

$$\frac{x^{abc}}{V} = \varphi^{123}$$

и для дифференциалов координат соответственно

$$\frac{dx^{abc}}{V} = d\varphi^{123} \,.$$

Для координат размерности длины имеем

$$dx^{abc} = R\,d\varphi^{123}\,.$$

x^{ab4}

– координаты объема в трехмерном пространстве $(\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_b, \mathcal{E}_4)$. Вместе с тем x^{ab4} можно рассматривать как координаты площади кругового сектора в в плоскости $(\mathcal{E}_{ab}, \mathcal{E}_4)$, ограниченного окружностью, определяемой уравнением

$$-r^2 = -(x^{ab})^2 - (x^4)^2\,.$$

Мы полагаем, что входящие в это уравнение координаты имеют размерность длины. То есть,

$$x^{ab} = R\,\varphi^{ab}\,, \qquad x^4 = c\,t\,.$$

В результате будем иметь

$$x^{ab4} = \frac{1}{2}\,r^2\,\varphi^{ab4}\,,$$

где φ^{ab4} – угол кругового сектора в указанной плоскости. И для дифференциала координат

$$dx^{ab4} = \frac{1}{2}\,r^2\,d\varphi^{ab4}\,. \tag{10}$$

Покажем, что круговой угол φ^{ab4} связан с угловой скоростью вращения. Действительно,

$$\tan\varphi^{ab4} = \frac{x^{ab}}{x^4} = \frac{R}{c}\,\frac{\varphi^{ab}}{t}\,.$$

Здесь

$$\omega^{ab4} = \frac{x^{ab}}{x^4}$$

есть угловая скорость в относительных единицах. Далее учтем, что величина

$$\frac{\varphi^{ab}}{t} = \omega^{ab}$$

представляет собой угловую скорость вращения в плоскости $(\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_b)$ и кроме того введем постоянную величину

$$\Omega = \frac{c}{R} = \frac{1}{T}\,,$$

имеющую размерность угловой скорости. В результате получим

$$\omega^{ab4} = \tan\varphi^{ab4} = \frac{\omega^{ab}}{\Omega}\,.$$

Отсюда для дифференциала $d\omega^{ab4}$

$$d\omega^{ab4} = \frac{d\varphi^{ab4}}{\cos^2\varphi^{ab4}} = (1+\tan^2\varphi^{ab4})\,d\varphi^{ab4}\,.$$

Выразим отсюда $d\varphi^{ab4}$

$$d\varphi^{ab4} = \frac{(x^4)^2}{(x^4)^2 + (x^{ab})^2}\,d\omega^{ab4}\,.$$

Подставляя это выражение в (10), получим

$$dx^{ab4} = \frac{(x^4)^2}{2}\,d\omega^{ab4}\,.$$

За единичную площадь примем $S = \frac{1}{2}\,R^2$. Тогда для координат в относительных единицах получим

$$\frac{dx^{ab4}}{S} = \frac{(x^4)^2}{R^2}\,d\omega^{ab4}\,.$$

Вблизи радиуса R имеем $x^4 \approx R$ и

$$\frac{dx^{ab4}}{S} = d\omega^{ab4} = \frac{d\omega^{ab}}{\Omega}\,.$$

Для координат размерности длины имеем

$$dx^{ab4} = \frac{R\,d\omega^{ab}}{\Omega}\,.$$

x^{1324}

– координаты вектора-4-х мерного объема в 4-х мерном пространстве СТО. Вместе с тем x^{1324} можно рассматривать как координаты площади кругового сектора в в плоскости $(\mathcal{E}_{132}, \mathcal{E}_4)$, ограниченного окружностью, определяемой уравнением

$$-r^2 = -(x^{132})^2 - (x^4)^2\,.$$

Здесь надо полагать, что входящие в это уравнение координаты имеют размерность длины. То есть,

$$x^{132} = R\,d\varphi^{123}\,, \qquad x^4 = c\,t\,.$$

В результате будем иметь

$$x^{1324} = \frac{1}{2}\,r^2\,\varphi^{1324}\,,$$

где φ^{1324} – угол кругового сектора в указанной плоскости. И для дифференциала координат

$$dx^{1324} = \frac{1}{2}\,r^2\,d\varphi^{1324}\,. \tag{11}$$

Покажем, что круговой угол φ^{1324} связан с телесной скоростью* вращения. Действительно,

$$\tan\varphi^{1324} = \frac{x^{132}}{x^4} = \frac{R}{c}\,\frac{\varphi^{132}}{t}\,.$$

*скоростью изменения телесного угла

Здесь

$$\omega^{1324} = \frac{x^{132}}{x^4}$$

есть телесная скорость в относительных единицах. Далее учтем, что величина

$$\frac{\varphi^{132}}{t} = \omega^{132}$$

представляет собой телесную скорость вращения в геометрическом пространстве и кроме того введем постоянную величину

$$\Omega_T = \frac{c}{R} = \frac{1}{T}\,,$$

имеющую размерность телесной скорости, например, in стерадиан/сек. В результате получим

$$\omega^{1324} = \tan\varphi^{1324} = \frac{\omega^{132}}{\Omega_T}\,.$$

Отсюда для дифференциала $d\omega^{1324}$

$$d\omega^{1324} = \frac{d\varphi^{1324}}{\cos^2\varphi^{1324}} = (1+\tan^2\varphi^{1324})\,d\varphi^{1324}\,.$$

Выразим отсюда $d\varphi^{1324}$

$$d\varphi^{1324} = \frac{(x^4)^2}{(x^4)^2+(x^{132})^2}\,d\omega^{1324}\,.$$

Подставляя это выражение в (11), получим

$$dx^{1324} = \frac{(x^4)^2}{2}\,d\omega^{1324}\,.$$

За единичную площадь примем $S = \frac{1}{2}R^2$. Тогда для координат в относительных единицах получим

$$\frac{dx^{1324}}{S} = \frac{(x^4)^2}{R^2}\,d\omega^{1324}\,.$$

Вблизи радиуса R будем иметь $x^4 \approx R$ и

$$\frac{dx^{1324}}{S} = d\omega^{1324} = \frac{d\omega^{132}}{\Omega_T}\,.$$

Для координат размерности длины имеем

$$dx^{1324} = \frac{R\,d\omega^{132}}{\Omega_T}\,.$$

x^0

– координаты вектора длины. Этот вектор наиболее загадочен для объяснения. Для выяснения его смысла рассмотрим частный вектор алгебры Клиффорда

$$x = \mathcal{E}_0\,x^0 + \mathcal{E}_a\,x^a + \mathcal{E}_4\,x^4\,.$$

И вычислим скалярное произведение этого вектора на себя

$$\langle x, x\rangle = (x^0)^2 + (x^a)^2 - c^2\,t^2\,.$$

Если допустить, что $\langle x, x\rangle = 0$, то получим соотношение

$$(x^0)^2 + (x^a)^2 - c^2\,t^2 = 0\,.$$

Из сравнения его с соотношением (1), известным из СТО, получим, что координата x^0 эквивалентна *интервалу*, вводимому в СТО. На основании изложенного далее мы будем полагать

- рассматриваемые нами векторы алгебры Клиффорда имеют нулевую длину;
- координата x^0 есть интервал, обобщающий интервал, вводимый в СТО.

Мы рассчитываем, что при такой интерпретации координаты x^0 мы не встретимся с какими-либо противоречиями.

Приведенные соображения позволяют записать дифференциал вектора пространства – времени лептона в следующем виде

$$dx = \mathcal{E}_0\,dx^0 + \mathcal{E}_a\,dx^a + \mathcal{E}_4\,dx^4 + \mathcal{E}_{ab}\,R\,d\varphi^{ab} + \\ \mathcal{E}_{a4}\,T\,dv^a + \mathcal{E}_{123}\,R\,d\varphi^{123} + \mathcal{E}_{ab4}\,\tfrac{R\,d\omega^{ab}}{\Omega} + \mathcal{E}_{1324}\,\tfrac{R\,d\omega^{132}}{\Omega_T}\,.$$

Для квадрата длины этого вектора имеем

$$\langle dx, dx\rangle = (dx^0)^2 + (dx^a)^2 - c^2\,dt^2 - R^2\,(d\varphi^{ab})^2 + \\ T^2\,(dv^a)^2 - R^2\,(d\varphi^{123})^2 + \tfrac{R^2\,(d\omega^{ab})^2}{\Omega^2} - \tfrac{R^2\,(d\omega^{132})^2}{(\Omega_T)^2} = 0\,.$$

Это соотношение обобщает интервал, который вводится в СТО.

Из предыдущих формул видно, что параметр R – "радиус"лептона является ключевым и при $R \to 0$ (соответственно $T \to 0$, $\Omega \to \infty$ и $\Omega_T \to \infty$), то есть по мере удаления от лептона, пространство – время лептона переходит в пространство – время СТО.

V. СОБСТВЕННЫЙ ОБОБЩЕННЫЙ ИМПУЛЬС ЛЕПТОНА.

Действие лептона S является функцией указанных выше координат. Производные от действия по координатам определяют компоненты собственного импульса лептона. Мы называем его обобщенным, имея в виду, что действие является вектором алгебры Клиффорда, а не скаляром, как в классической физике*.

Компоненты собственного обобщенного импульса лептона таковы

*Смотри Лекции 1 и 2.

- 4-х мерный импульс
$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}\,.$$
В том числе
  - ◇ 3-х мерный импульс
$$p_a = \frac{\partial S}{\partial x^a}$$
  - ◇ энергия
$$p_4 = \frac{\partial S}{\partial x^4} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{E}{c}$$
- 4-х мерный угловой момент импульса
$$p_{ij} = \frac{\partial S}{\partial x^{ij}}\,.$$
В том числе
  - ◇ 3-х мерный угловой момент импульса или спин
$$p_{ab} = \frac{\partial S}{\partial x^{ab}} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial S}{\partial \varphi^{ab}} = \frac{M_{ab}}{R}\,,$$
  - ◇ 3-х мерная сила
$$p_{a4} = \frac{\partial S}{\partial x^{a4}} = \frac{1}{T}\,\frac{\partial S}{\partial v^a} = T\,f,,$$
- 4-х мерный телесный момент импульса
$$p_{ijk} = \frac{\partial S}{\partial x^{ijk}}\,,$$
в том числе
  - ◇ 3-х мерный телесный момент импульса
$$p_{123} = \frac{\partial S}{\partial x^{123}} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial S}{\partial \varphi^{123}} = \frac{M_{123}}{R}\,,$$
  - ◇ 3-х мерный угловой момент силы
$$p_{ab4} = \frac{\partial S}{\partial x^{ab4}} = \frac{\Omega}{R}\,\frac{\partial S}{\partial \omega^{ab}} = \frac{F_{ab}}{c}\,.$$
- Телесный момент силы
$$p_{1324} = \frac{\partial S}{\partial x^{1324}} = \frac{\Omega_T}{R}\frac{\partial S}{\partial \omega^{132}} = \frac{F_{132}}{c}\,.$$
- Импульс покоя
$$p_0 = \frac{\partial S}{\partial x^0}$$
Так как мы отождествили x^0 с интервалом, вводимым в СТО, то для классического приближения, когда $S = \varepsilon_0\, S^0$*,
$$p^0{}_0 = \frac{\partial S^0}{\partial x^0} = -m\,c\,.$$

Рассмотренные компоненты импульса участвуют в формировании вектора импульса
$$p = \frac{\partial S}{\partial x^I}\,\mathcal{E}^I = p_I \mathcal{E}^I\,.$$
Для квадрата длины этого вектора имеем соотношение, обобщающее связь между импульсом и энергией в СТО
$$\langle p, p\rangle = (m\,c)^2 + (p_a)^2 - \tfrac{E^2}{c^2} - \tfrac{(M_{ab})^2}{R^2} + T^2\,(f_a)^2 - \tfrac{(M_{123})^2}{R^2} + \tfrac{(F_{ab})^2}{c^2} - \tfrac{(F_{132})^2}{c^2} = 0\,. \tag{12}$$

VI. ОПЕРАТОРЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ КАК ВЕКТОРЫ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА.

Введем символический вектор
$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^I}\,\mathcal{E}^I\,,$$
в котором операторы дифференцирования
$$\frac{\partial}{\partial x^I}$$
служат своеобразными координатами. Этот вектор обобщает известный вектор ∇ – набла, вводимый в теории векторного поля. Множество указанных векторов будем рассматривать как алгебру Клиффорда, которую обозначим $\mathbb{D}_x$. Эта алгебра является частным случаем введенной нами алгебры $\mathbb{L}_{left}$.

Скалярное произведение вектора $\frac{\partial}{\partial x} \in \mathbb{D}_x$ и вектора $dx \in \mathbb{X}$ дает инвариантный оператор – дифференциал:
$$d(\,) = \langle \frac{\partial}{\partial x^I}\,\mathcal{E}^I, \mathcal{E}_K\,dx^K\rangle = \frac{\partial}{\partial x^I}\,dx^I\,.$$
Скалярное произведение вектора $\frac{\partial}{\partial x} \in \mathbb{D}_x$ на себя дает обобщенный оператор Даламбера:
$$\Box = \langle \frac{\partial}{\partial x^I}\,\mathcal{E}^I, \frac{\partial}{\partial x^I}\,\mathcal{E}^I, \rangle = \mathrm{g}^{IK}\,\frac{\partial^2}{\partial x^I\,\partial x^K}\,.$$
В соответствии с регулярным представлением имеет место соответствие
$$\frac{\partial}{\partial x^I}\,\mathcal{E}^I \sim \frac{\partial}{\partial x^I}\,C^{IK}{}_L\,. \tag{13}$$
Операторы дифференцирования можно характеризовать двояким образом. Первая характеристика связана с движением, которое операторы дифференцирования представляют. При этом дифференциал
$$dx = \mathcal{E}_K\,dx^K$$

*Смотри Лекцию 1.

есть обобщенный сдвиг в пространстве – времени лептона, а оператор

$$\frac{\partial}{\partial x^I}\,\mathcal{E}^I$$

есть оператор этого сдвига, или более подробно – оператор движения, описываемого этим сдвигом. С этой точки зрения имеем следующие компоненты оператора дифференцирования

- Оператор сдвига в пространстве – времени СТО $\frac{\partial}{\partial x^i}$.
    - ◇ Оператор сдвига в геометрическом пространстве $\frac{\partial}{\partial x^a}$.
    - ◇ Оператор сдвига во времени $\frac{\partial}{\partial x^4}$.
- Оператор поворотов в 4-х мерном пространстве – времени СТО $\frac{\partial}{\partial x^{ij}}$.
    - ◇ Оператор поворотов в геометрическом пространстве $\frac{\partial}{\partial x^{ab}}$.
    - ◇ Оператор ускоренного поступательного движения $\frac{\partial}{\partial x^{a4}}$.
- Оператор телесных поворотов в 4-х мерном пространстве – времени СТО $\frac{\partial}{\partial x^{ijk}}$.
    - ◇ Оператор телесных поворотов в геометрическом пространстве $\frac{\partial}{\partial x^{ab}}$.
    - ◇ Оператор ускоренного вращения $\frac{\partial}{\partial x^{ab4}}$.
- Оператор ускоренного телесного вращения $\frac{\partial}{\partial x^{1324}}$.
- Оператор растяжения – сжатия (дилатаций) $\frac{\partial}{\partial x^0}$.

Операторы дифференцирования можно характеризовать иначе, так, как это делается в квантовой механике. Из соответствия, вытекающего из регулярного представления базисных векторов (6), следует соответствие

$$\frac{\partial}{\partial x^I}\,C^{IK}{}_L \sim (p^0)_I = \frac{\partial S^0}{\partial x^I}\,.$$

Здесь по повторяющемуся индексу I суммирование не предполагается. Указанное соответствие позволяет характеризовать операторы дифференцирования по соответствующему импульсу. Вслед за классиками квантовой механики мы будем обозначать оператор дифференцирования символом импульса с верхней "крышечкой":

$$\hat{p}_I = \frac{\partial}{\partial x^I}\,C^{IK}{}_L$$

и называть его оператором импульса $(p^0)_I$ [*].

Например, операторы

$$\hat{p}_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}\,C^{1K}{}_L\,, \qquad \hat{p}_2 = \frac{\partial}{\partial x^2}\,C^{2K}{}_L\,,$$

$$\hat{p}_3 = \frac{\partial}{\partial x^3}\,C^{3K}{}_L\,, \qquad \hat{p}_4 = \frac{\partial}{\partial x^4}\,C^{4K}{}_L$$

есть соответственно операторы импульсов p_1, p_2, p_3 и энергии $p_4 = \frac{E}{c}$. Для структурных матриц в первом сжатом представлении это операторы Дирака[†]

$$i \begin{array}{|c|c|}\hline & -\sigma^a \\ \hline \sigma^a & \\ \hline\end{array}\ \partial_a\,, \qquad -i \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\ \partial_4$$

Для второго сжатого представления – это операторы Паули

$$\hat{p}_1 = -i\,\sigma^1\,\frac{\partial}{\partial x^1}\,, \qquad \hat{p}_2 = -i\,\sigma^2\,\frac{\partial}{\partial x^2}\,,$$

$$\hat{p}_3 = -i\,\sigma^3\,\frac{\partial}{\partial x^3}\,, \qquad \hat{p}_4 = -i\,\frac{\partial}{\partial x^4}\,.$$

И, наконец, для третьего сжатого представления – это операторы Шредингера

$$\hat{p}_1 = -i\,\frac{\partial}{\partial x^1}\,, \hat{p}_2 = \frac{\partial}{\partial x^2}\,, \hat{p}_3 = -i\,\frac{\partial}{\partial x^3}\,, \hat{p}_4 = -i\,\frac{\partial}{\partial x^4}\,.$$

Интересно отметить, что при точном вычислении оператор $\hat{p}_2$ не есть $-i\,\frac{\partial}{\partial x^2}$, как предполагал Шредингер.

Таким образом, “необычные” квантовомеханические операторы есть “обычные” операторы дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial x^I}\,\mathcal{E}^I\,,$$

но записанные в регулярном представлении алгебры Клиффорда.

Точно также мы имеем

- операторы момента импульса

$$\hat{p}_{21} = \frac{\partial}{\partial x^{21}}\,C^{21K}{}_L\,, \qquad \hat{p}_{13} = \frac{\partial}{\partial x^{13}}\,C^{13K}{}_L\,,$$

$$\hat{p}_{32} = \frac{\partial}{\partial x^{32}}\,C^{32K}{}_L\,,$$

[*] Здесь также по повторяющемуся индексу I суммирование не предполагается.

[†] Смотри Лекцию 3.

- операторы силы

$$\hat{p}_{14} = \frac{\partial}{\partial x^{14}}\, C^{14K}{}_L\,, \qquad \hat{p}_{24} = \frac{\partial}{\partial x^{24}}\, C^{24K}{}_L\,,$$

$$\hat{p}_{34} = \frac{\partial}{\partial x^{34}}\, C^{34K}{}_L\,,$$

- оператор телесного момента импульса

$$\hat{p}_{123} = \frac{\partial}{\partial x^{123}}\, C^{123K}{}_L\,,$$

- операторы момента силы

$$\hat{p}_{124} = \frac{\partial}{\partial x^{124}}\, C^{124K}{}_L\,, \qquad \hat{p}_{134} = \frac{\partial}{\partial x^{134}}\, C^{134K}{}_L\,,$$

$$\hat{p}_{234} = \frac{\partial}{\partial x^{234}}\, C^{234K}{}_L\,,$$

- оператор телесного момента силы

$$\hat{p}_{1324} = \frac{\partial}{\partial x^{1324}}\, C^{1324K}{}_L\,,$$

- оператор дилатации

$$\hat{p}_{0} = \frac{\partial}{\partial x^{0}}\, C^{0K}{}_L\,.$$

1. Подалгебры алгебры Клиффорда и операторы независимых движений.

В предыдущем разделе мы охарактеризовали векторы пространства-времени и операторы дифференцирования движением, которое они представляют. В том случае, когда решаются частные задачи, связанные с подгруппами движений, целесообразно установить связь между подалгебрами алгебры Клиффорда и подгруппами движений.

Сначала полезно выделить подалгебры, в которые не входит вектор времени $\mathcal{E}_4\, dx^4$. Такие подалгебры назовем *статическими.* Напротив подалгебры, в которые указанный вектор входит назовем *динамическим.*

Примеры статических подалгебр.

- Подалгебра поворотов в геометрическом пространстве. В этом случае пространство-время частицы характеризуется вектором – кватернионом

  $$dx = \mathcal{E}_0\, dx^0 + \mathcal{E}_{21}\, dx^{21} + \mathcal{E}_{13}\, dx^{13} + \mathcal{E}_{32}\, dx^{32}\,.$$

  Структурными матрицами этой подалгебры в комплексном представлении являются единичная матрица и три матрицы Паули, умноженные на мнимую единицу. Оператор дифференцирования имеет вид

  $$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^0}\, \mathcal{E}^0 + \frac{\partial}{\partial x^{21}}\, \mathcal{E}^{21} + \frac{\partial}{\partial x^{13}}\, \mathcal{E}^{13} + \frac{\partial}{\partial x^{32}}\, \mathcal{E}^{32}\,.$$

  А квантовомеханические операторы в этом случае таковы

  $$\hat{p}_0 = \frac{\partial}{\partial x^0}\, C^{0K}{}_L\,, \qquad \hat{p}_{ab} = \frac{1}{R}\, \hat{M}_{ab}\,,$$

  где

  $$\hat{M}_{ab} = \frac{\partial}{\partial \varphi^{ab}}\, C^{abK}{}_L$$

  есть операторы момента импульса или спина. Алгебра указанных операторов есть алгебра 3-х мерного спина.

- Подалгебра поворотов в пространстве-времени СТО. В этом случае пространство-время частицы характеризуется вектором

  $$dx = \mathcal{E}_0\, dx^0 + \mathcal{E}_{ab}\, dx^{ab} + \mathcal{E}_{a4}\, dx^{a4} + \mathcal{E}_{1324}\, dx^{1324}\,.$$

  Оператор дифференцирования имеет вид

  $$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^0}\, \mathcal{E}^0 + \frac{\partial}{\partial x^{ab}}\, \mathcal{E}^{ab} + \frac{\partial}{\partial x^{a4}}\, \mathcal{E}^{a4} + \frac{\partial}{\partial x^{1324}}\, \mathcal{E}^{132}\,.$$

  А квантовомеханические операторы в этом случае таковы

  $$\hat{p}_0 = \frac{\partial}{\partial x^0}\, C^{0K}{}_L\,, \quad \hat{p}_{ab} = \frac{1}{R}\, \hat{M}_{ab}\,,$$

  $$\hat{p}_{a4} = T\, \hat{f}_{a4}\,, \quad \hat{p}_{1324} = \frac{1}{c}\, \hat{F}_{1324}\,,$$

  где помимо операторов момента импульса или спина фигурируют

  $$\hat{f}_{a4} = \frac{1}{T^2}\, \frac{\partial}{\partial v^a}\, C^{a4K}{}_L$$

  – операторы силы и оператор телесного момента силы

  $$\hat{F}_{1324} = \frac{1}{T^2}\, \frac{\partial}{\partial \omega^{1324}}\, C^{1324K}{}_L\,.$$

  Алгебра указанных операторов есть алгебра релятивистского спина.

- Подалгебра сдвигов, поворотов и телесного поворота в геометрическом пространстве. В этом случае пространство-время частицы характеризуется вектором

  $$dx = \mathcal{E}_0\, dx^0 + \mathcal{E}_a\, dx^a + \mathcal{E}_{ab}\, dx^{ab} + \mathcal{E}_{123}\, dx^{123}\,.$$

  Структурными матрицами этой подалгебры в комплексном представлении являются восемь матриц Дирака. Оператор дифференцирования имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^0}\,\mathcal{E}^0 + \frac{\partial}{\partial x^a}\,\mathcal{E}^a + \frac{\partial}{\partial x^{ab}}\,\mathcal{E}^{ab} + \frac{\partial}{\partial x^{123}}\,\mathcal{E}^{123}\,.$$

А квантовомеханические операторы в этом случае таковы

$$\hat{p}_0 = \frac{\partial}{\partial x^0}\,C^{0K}{}_L\,, \qquad \hat{p}_a\,,$$

$$\hat{p}_{ab} = \frac{1}{R}\,\hat{M}_{ab}\,, \quad \hat{p}_{123} = \frac{1}{R}\,\hat{M}_{123}\,,$$

где помимо операторов импульса и спина фигурирует

$$\hat{M}_{123} = \frac{\partial}{\partial \varphi^{123}}\,C^{123K}{}_L$$

– оператор телесного момента импульса.

Примеры динамических подалгебр.

- Подалгебра телесных ускоренных вращений. В этом случае пространство-время частицы характеризуется вектором

  $$dx = \mathcal{E}_0\,dx^0 + \mathcal{E}_4\,dx^4 + \mathcal{E}_{123}\,dx^{123} + \mathcal{E}_{1324}\,dx^{1324}\,.$$

  Оператор дифференцирования имеет вид

  $$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^4}\,\mathcal{E}^4 + \frac{\partial}{\partial x^{123}}\,\mathcal{E}^{123} + \frac{\partial}{\partial x^{1324}}\,\mathcal{E}^{1324}\,.$$

  А квантовомеханические операторы в этом случае таковы

  $$\hat{p}_0 = \frac{\partial}{\partial x^0}\,C^{0K}{}_L\,, \quad \hat{p}_4 = \frac{1}{c}\,\hat{E}\,,$$

  $$\hat{p}_{123} = \frac{1}{R}\,\hat{M}_{123}\,, \quad \hat{p}_{1324} = \frac{1}{c}\,\hat{F}_{1324}\,,$$

  где

  $$\hat{E} = \frac{\partial}{\partial t}\,C^{4K}{}_L$$

  есть оператор энергии. Алгебра указанных операторов очень похожа на алгебру слабого изоспина. На этом вопросе мы остановимся позднее.

- Подалгебра ускоренных поступательных движений. Эта подалгебра вызывает специальный интерес и мы рассмотрим ее отдельно с следующем разделе.

2. Операторы движения виртуального лептона.

Развитое в настоящей Лекции представление о пространстве – времени лептона позволяет подойти к описанию виртуальных частиц (в данном случае лептонов) с новой точки зрения, отличной от Фейнмановских диаграмм.

Виртуальные частицы характеризуются двумя обстоятельствами:

1. для них не выполняется соотношение СТО между импульсом и энергией частицы

   $$(m\,c)^2 + (p_a)^2 - \frac{E^2}{c^2} = 0\,,$$

2. виртуальная частица является носителем силы.

В рассмотренном нами пространстве-времени лептона соотношение СТО между импульсом и энергией не выполняется, точнее оно обобщается до соотношения (12). Рассмотрим частный случай этого соотношения

$$(m\,c)^2 + (p_a)^2 - \frac{E^2}{c^2} + T^2\,(f_a)^2 = 0\,. \qquad (14)$$

Из него видно, что оно описывает частицу, являющуюся носителем силы. Таким образом, если это соотношение отнести к виртуальной частице, то оба вышеуказанных обстоятельства будут его следствием. Из (14) следует, что пространство-время виртуальной частицы характеризуется вектором

$$dx = \mathcal{E}_0\,dx^0 + \mathcal{E}_a\,dx^a + \mathcal{E}_4\,dx^4 + \mathcal{E}_{a4}\,T\,dv^a\,,$$

оператор дифференцирования имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^0}\,\mathcal{E}^0 + \frac{\partial}{\partial x^a}\,\mathcal{E}^a + \frac{\partial}{\partial x^4}\,\mathcal{E}^4 + \frac{\partial}{\partial x^{a4}}\,\mathcal{E}^{a4}\,.$$

А квантовомеханический оператор выглядит следующим образом

$$\hat{p} = \frac{\partial}{\partial x^0}\,C^{0K}{}_L + \frac{\partial}{\partial x^a}\,C^{aK}{}_L + \frac{\partial}{\partial x^4}\,C^{4K}{}_L + \frac{\partial}{\partial x^{a4}}\,C^{a4K}{}_L\,. \qquad (15)$$

В следующей Лекции мы, основываясь на этом операторе, приведем уравнение движения виртуального лептона.

VII. УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА.

Здесь полезно вспомнить подход к векторному пространству, доставшийся нам от классических представлений. Согласно ему векторное пространство универсально и не связано с типом, размерностью* векторной величины. Размерность есть прерогатива координат. Поэтому векторное пространство, установленное для геометрических величин, применяется для величин другой размерности (сил, потока энергии и т.д.). Поэтому базисные векторы, по отношению к которым рассматривается, например, сила есть те же базисные векторы, по отношению к которым рассматривается геометрический отрезок.

С этой точки зрения мы приводим следующую таблицу. В ней $\mathbb{L}_{left}$ и $\mathbb{L}_{right}$ универсальные алгебры*. Они используются при построении пространства – времени, пространства действия, пространства операторов лептонов путем привлечения определенных координат, имеющих соответствующий физический смысл.

$$\begin{array}{cc}
\mathbb{L}_{left} & \mathbb{L}_{right} \\
\mathcal{E}_I & \varepsilon_I \\
{}^{+}C^{L}{}_{KI} & C^{L}{}_{KI} \\
\\
\mathbb{X} & \mathbb{S} \\
x^I & S^I \\
x = \mathcal{E}_I \cdot x^I & S = \varepsilon_I \cdot S^I \\
d_1 x^I = \chi^I & d_1 S^I = \psi^I \\
\chi = \mathcal{E}_I \cdot \chi^I & \psi = \varepsilon_I \cdot \psi^I \\
\\
{}^{+}\mathbb{D}_x & {}^{+}\mathbb{D}_s \\
\frac{\partial}{\partial x_I} & \frac{\partial}{\partial S_I} \\
\mathcal{E}_I \cdot \frac{\partial}{\partial x_I} & \varepsilon_I \cdot \frac{\partial}{\partial S_I}
\end{array}$$

Аналогичную таблицу мы приводим для сопряженных величин

$$\begin{array}{cc}
{}^{+}\mathbb{L}_{left} & {}^{+}\mathbb{L}_{right} \\
\mathcal{E}^I & \varepsilon^I \\
\langle \mathcal{E}^I, \mathcal{E}_K \rangle = \delta^I{}_K & \langle \varepsilon^I, \varepsilon_K \rangle = \delta^I{}_K \\
C^{IK}{}_L & {}^{+}C^{IK}{}_L \\
\\
{}^{+}\mathbb{X} & {}^{+}\mathbb{S} \\
x_I & S_I \\
{}^{+}x = x_I \cdot \mathcal{E}^I & {}^{+}S = S_I \cdot \varepsilon^I \\
d_1 x_I = \chi_I & d_1 S_I = \psi_I \\
{}^{+}\chi = \chi_I \cdot \mathcal{E}^I & {}^{+}\psi = \psi_I \cdot \varepsilon^I \\
\\
\mathbb{D}_x & \mathbb{D}_s \\
\frac{\partial}{\partial x^I} & \frac{\partial}{\partial S^I} \\
\frac{\partial}{\partial x^I} \cdot \mathcal{E}^I & \frac{\partial}{\partial S^I} \cdot \varepsilon^I
\end{array}$$

*Под размерностью здесь понимается не число измерений векторного пространства, а единица измерения векторной физической величины.

*В том смысле, что векторы этих алгебр имеют абстрактные координаты.

Векторы, имеющие отношение к пространству – времени мы вынуждены связывать с алгеброй $\mathbb{L}_{left}$, а векторы, имеющие отношение к действию – с алгеброй $\mathbb{L}_{right}$. Причина такого разделения остается неясной.

В дополнение к (6) укажем, что связь между структурными постоянными алгебры ${}^{+}\mathbb{S}$ и алгебры $\mathbb{S}$ определяется следующим образом:

$$ {}^{+}C^{RQ}{}_P = \delta^{RI} \cdot \delta^{QK} \cdot C^{L}{}_{KI} \cdot \delta_{LP} \,. $$

Связь между структурными постоянными алгебры ${}^{+}\mathbb{X}$ и алгебры $\mathbb{S}$ определяется следующим образом:

$$ C^{RQ}{}_P = g^{RI} \cdot g^{QK} \cdot C^{L}{}_{KI} \cdot g_{LP} \,. $$

Связь между структурными постоянными алгебры ${}^{+}\mathbb{S}$ и алгебры $\mathbb{X}$ определяется следующим образом:

$$ {}^{+}C^{RQ}{}_P = g^{RI} \cdot g^{QK} \cdot {}^{+}C^{L}{}_{KI} \cdot g_{LP} \,. $$

Связь между структурными постоянными алгебры ${}^{+}\mathbb{X}$ и алгебры ${}^{+}\mathbb{S}$ определяется следующим образом:

$$ C^{RQ}{}_P = g^{R}{}_I \cdot g^{Q}{}_K \cdot {}^{+}C^{IK}{}_L \cdot g^{L}{}_P \,. $$

где

$$ g^{R}{}_I = g^{RS}\, \delta_{SI} \,. $$

Связь между структурными постоянными алгебры $\mathbb{S}$ и алгебры $\mathbb{X}$ определяется следующим образом:

$$ {}^{+}C^{P}{}_{QR} = g^{I}{}_R \cdot g^{K}{}_Q \cdot C^{L}{}_{KI} \cdot g^{P}{}_L \,. $$

VIII. КВАНТОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ ЛЕПТОНА

В Лекции 1 было показано, что квантовые явления объясняются алгебраической структурой векторного пространства. В настоящей Лекции мы пришли к необходимости рассматривать пространство-время лептона как алгебру Клиффорда. Таким образом, обобщая пространство-время до алгебры Клиффорда, мы по необходимости приходим к квантованию пространства-времени лептона. Здесь так же, как для пространства действия, уравнения структуры выступают как квантовые постулаты.

1. Уравнения структуры

Особенность дифференцирования векторов алгебр связана с дифференцированием закона умножения векторов. Она проявляется в существовании для алгебр *уравнений структуры*. Далее рассмотрим уравнения структуры для алгебры Клиффорда $\mathbb{X}$. Условимся, что векторы имеют размерность длины. Тогда закон умножения векторов в $\mathbb{X}$ запишется так:

$$x = \frac{1}{R} \cdot x_1 \circ x_2 \,. \tag{16}$$

Здесь R – ранее введенная постоянная величина, согласующая размерности правой и левой частей уравнения, имеющая размерность длины.

Заметим, что при $R \to 0$, то есть вдали от лептона алгебра Клиффорда сводится к пространству-–времени СТО. При этом $\circ$-умножение сводится к умножению вектора на число.

Если воспользоваться законом умножения базисных векторов (4), то получим правило умножения координат векторов сомножителей:

$$x^L = \frac{1}{R} \cdot {}^+C^L{}_{KI}\,(x_2)^I\,(x_1)^K \,.$$

Далее нам понадобится представление об *обратном* векторе x^{-1}, для которого выполняется условие (5). Заметим, что для соответствующих векторов закон умножения выглядит так

$$x^{-1} = (\frac{1}{R} \cdot x_1 \circ x_2)^{-1} = (x_2)^{-1} \circ (x_1)^{-1} \cdot R \,. \tag{17}$$

Действительно

$$x \circ x^{-1} = \frac{1}{R} \cdot x_1 \circ x_2 \circ (x_2)^{-1} \circ (x_1)^{-1} \cdot R = \mathcal{E}_0 \,.$$

Как и в Лекции 1 при дифференцировании закона умножения (16) будем придерживаться следующих обозначений. Обозначим через $d_1 x$ дифференциал вектора x в соотношении (16) при изменении вектора x_1, обозначим через $d_2 x$ дифференциал вектора x в соотношении (16) при изменении вектора x_2. В соответствии с этим имеем

$$d_1 x = \frac{1}{R}\, dx_1 \circ x_2 \,, \qquad d_2 x = \frac{1}{R}\, x_1 \circ dx_2 \,.$$

Из этих выражений получаем

$$dx_2 = R \cdot (x_1)^{-1} \circ d_2 x \,, \qquad dx_1 = R \cdot d_1 x \circ (x_2)^{-1} \,. \tag{18}$$

С использованием принятых обозначений рассмотрим второй дифференциал $d_2 d_1 x$. Из (16) для него имеет место

$$d_2 d_1 x = \frac{1}{R}\, dx_1 \circ dx_2 \,. \tag{19}$$

Используя (18) и (17), получим

$$d_2 d_1 x = d_1 x \circ (x)^{-1} \circ d_2 x \,. \tag{20}$$

Вблизи единицы алгебры, то есть при $x = R\,\mathcal{E}_0$ и $(x)^{-1} = \frac{1}{R}\,\mathcal{E}_0$, уравнение (20) принимает вид

$$d_2 d_1 x = \frac{1}{R}\, d_1 x \circ d_2 x \,. \tag{21}$$

Это соотношение есть *уравнение структуры* алгебры $\mathbb{X}$ в векторной форме.

Подставляя в (21) выражения дифференциалов через дифференциалы координат векторов пространства – времени и пользуясь законом умножения базисных векторов (3), получим уравнения структуры в координатной форме

$$d_2 d_1 x^L = \frac{1}{R}\, {}^+C^L{}_{KI} \cdot d_2 x^I \cdot d_1 x^K \,. \tag{22}$$

Предыдущие рассуждения обобщаются на дифференциал n – ой степени

$$d_n d_{n-1} \ldots d_2 d_1 x \,.$$

Для него уравнения структуры имеют вид

$$d_n d_{n-1} \ldots d_2 d_1 x = \frac{1}{R^{n-1}}\, d_1 x \circ d_2 x \circ \ldots \circ d_{n-1} x \circ d_n x \,.$$

2. Квантовые постулаты и волновая функция пространства-времени

В уравнении (21) введем обозначение

$$\chi = d_1 x$$

и назовем вектор χ *волновой функцией пространства – времени.*

Кроме того, введем обозначение d для дифференциала d_2. Уравнение структуры в новых обозначениях принимает вид

$$d\chi = \frac{1}{R}\, \chi \circ dx \,. \tag{23}$$

Это уравнение можно записать для координат волновой функции $\chi^I = d_1 x^I$:

$$d\chi^L = \frac{1}{R}\, {}^+C^L{}_{KI} \cdot dx^I \cdot \chi^K \,. \tag{24}$$

Уравнения (23), (24) имеют вид задачи на собственные значения оператора дифференциала d.

Итак мы получили следующий результат: уравнения структуры алгебры $\mathbb{X}$ могут быть представлены как задача на собственные значения оператора дифференциала d. То есть, уравнения структуры, представленные в виде (23) и (24) выступают как квантовые постулаты.

Будем рассматривать пространственно – временные координаты как функции вектора действия. Выразим дифференциал d в виде

$$d = \frac{\partial}{\partial S^M} \cdot dS^M$$

и введем обобщенные обратные импульсы:

$$(p^{-1})_M = \frac{\partial x}{\partial S^M} = \mathcal{E}_I \cdot \frac{\partial x^I}{\partial S^M} = \mathcal{E}_I \cdot (p^{-1})^I{}_M \,.$$

Тогда задача на собственные значения (24) приобретает вид

$$\frac{\partial \chi^L}{\partial S^M} = \frac{1}{R}\, {}^{+}C^{L}{}_{KI} \cdot (p^{-1})^{I}{}_{M} \cdot \chi^K \,. \tag{25}$$

Таким образом, исходя из алгебраической структуры пространства-времени мы пришли к задаче на собственные значения для пространственно-временных векторов и к явлению, которое представляет собой квантование пространства-времени.

IX. ВЫВОДЫ

- Вид уравнений Дирака заставляет считать, что лептонам необходимо соотнести свое собственное пространство-время. Оно обобщает пространство-время специальной теории относительности (СТО).

- Собственное пространство-время лептона необходимо рассматривать как алгебру Клиффорда, образующим пространством которой является пространство-время СТО.

- Указанные обобщения связаны с привлечением дополнительных координат в качестве независимых переменных пространства-времени. Помимо x^a – координат вектора-линии и x^4 – координат времени к ним относятся x^{ab} – координаты вектора-площади (вектора угла), x^{a4} – координаты вектора-скорости, x^{abc} – координаты вектора-объема (вектора телесного угла), x^{ab4} – координаты вектора угловой скорости, x^{abc4} – координаты вектора телесной угловой скорости.

- Дополнительным координатам соответствуют дополнительные компоненты импульса. К ним относятся 3-х мерный импульс p_a, энергия $p_4 = E/c$, 3-х мерный угловой момент импульса или спин $p_{ab} = M_{ab}/R$, 3-х мерная сила $p_{a4} = T\, f_a$, 3-х мерный телесный момент импульса $p_{123} = M_{123}/R$, 3-х мерный угловой момент силы $p_{ab4} = F_{ab}/c$, телесный момент силы $p_{1324} = F_{132}/c$, импульс покоя p_0.

- Собственное пространство-время лептона является алгеброй. Отсюда необходимо следует квантование этого пространства-времени. Исходные квантовые постулаты представляют собой уравнения структуры алгебры Клиффорда $\mathbb{X}$.