

Лекция 2. Алгебра Клиффорда как кандидат на алгебру действия.

А. А. Кеца́рис
(27 мая 2003 г.)

В этой лекции мы наделяем искомую алгебру действия такими же правилами умножения векторов как те, которые присущи алгебре матриц Дирака.

I. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей лекции мы пришли к необходимости ввести в обиход алгебру действия \mathbb{S} . Однако вид этой алгебры остался не установленным. Поэтому следующий шаг состоит в том, чтобы выбрать конкретную алгебру в качестве алгебры действия. А priori сделать такой выбор невозможно. Наводящие соображения следует искать в сегодняшней квантовой теории. Однако, следует иметь в виду, что такие соображения могут служить лишь пояснением, но не доказательством.

Прежде, чем двигаться в этом направлении, нам необходимо остановиться на двух темах:

- Регулярное представление базисных векторов в алгебре действия \mathbb{S} .
- Алгебра матриц Дирака.

В рамках первой темы мы покажем, что между умножением базисных векторов в алгебре действия \mathbb{S} и умножением структурных матриц существует взаимосвязь. А в пределах второй темы будут рассмотрены правила умножения, которым подчиняются матрицы Дирака.

II. РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БАЗИСНЫХ ВЕКТОРОВ В АЛГЕБРЕ ДЕЙСТВИЯ \mathbb{S} .

Обратимся к алгебре действия \mathbb{S} . Напомним, что закон умножения базисных векторов алгебры действия был записан в Лекции 1 в следующем виде*

$$\epsilon_K \circ \epsilon_I = \epsilon_L \cdot C_{KI}^L. \quad (1)$$

*Здесь, как и ранее, мы используем правило Эйнштейна: по повторяющимся нижнему и верхнему индексам выполняется суммирование.

Будем полагать, что искомая алгебра \mathbb{S} является ассоциативной. То есть, произведение нескольких векторов не зависит от порядка умножения сомножителей. Это условие может быть сведено к условию ассоциативности

$$(S_1 \circ S_2) \circ S_3 = S_1 \circ (S_2 \circ S_3).$$

Запишем условие ассоциативности для произведения трех базисных векторов

$$(\epsilon_N \circ \epsilon_K) \circ \epsilon_I = \epsilon_N \circ (\epsilon_K \circ \epsilon_I).$$

Отсюда, используя закон умножения базисных векторов, получим

$$(\epsilon_L \circ \epsilon_I) C_{NK}^L = (\epsilon_N \circ \epsilon_L) C_{KI}^L.$$

Откуда

$$C_{LI}^M \cdot C_{NK}^L = C_{NL}^M \cdot C_{KI}^L. \quad (2)$$

Сравнивая это выражение с самим законом умножения базисных векторов (1), заключаем, что базисным векторам ϵ_I можно поставить в соответствие структурные матрицы C_{LI}^M . При этом \circ — умножению базисных векторов ставится в соответствие обычное умножение матриц в обратном порядке. Это соответствие называется *регулярным (присоединенным) представлением* алгебры \mathbb{S} и обозначается:

$$\epsilon_I \sim C_{KI}^L.$$

Номер структурной матрицы I есть индекс базисного вектора, который представлен этой матрицей. В регулярном представлении произвольному вектору алгебры $S = \epsilon_I S^I$ соответствует матрица

$$S_K^L = C_{KI}^L \cdot S^I.$$

III. АЛГЕБРА МАТРИЦ ДИРАКА.

Для целей построения релятивистской квантовой теории электрона Дирак сконструировал шестнадцать матриц γ^I . Здесь индекс I пробегает значения[†] от 0 до 15. Приведем эти матрицы и укажем их свойства.

[†]Мы обозначаем индекс матриц также как обозначили индекс базисных векторов алгебры действия, так как в дальнейшем эти индексы будут отождествлены. Однако пока указанные индексы нужно считать несвязанными.

- Единичная матрица γ^0 .

$$\gamma^0 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}$$

- Четыре матрицы γ^k , где* индекс k принимает значения от 1 до 4.[†]

$$\gamma^1 = i \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline & -\sigma^1 \\ \hline \sigma^1 & \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma^2 = i \begin{array}{|c|c|} \hline & i \\ \hline & -i \\ \hline i & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline & -\sigma^2 \\ \hline \sigma^2 & \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma^3 = i \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline & -\sigma^3 \\ \hline \sigma^3 & \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma^4 = -i \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} = -i \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}$$

[‡] Для них имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \gamma^1 \cdot \gamma^1 &= \gamma^0, & \gamma^2 \cdot \gamma^2 &= \gamma^0, \\ \gamma^3 \cdot \gamma^3 &= \gamma^0, & \gamma^4 \cdot \gamma^4 &= -\gamma^0. \end{aligned} \quad (3)$$

С помощью матриц γ^k путем умножения их друг на друга образуются остальные одиннадцать матриц.

*Наша запись матриц γ^k отличается от обычно используемой записи наличием мнимой единицы i в качестве множителя (не путать ее с индексом i).

[†]Далее все индексы, обозначаемые малыми латинскими буквами, начиная с i , принимают значения от 1 до 4.

[‡]При преобразовании матриц использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}, \quad \sigma^1 = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \quad \sigma^2 = \begin{array}{|c|c|} \hline & -i \\ \hline i & \\ \hline \end{array}, \quad \sigma^3 = \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Матрицы $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ представляют собой *матрицы Паули* (с той разницей, что по соображениям симметрии в качестве σ^3 взята матрица с противоположным знаком).

- Матрицы

$$\gamma^{ik} = \gamma^k \cdot \gamma^i. \quad (4)$$

Здесь $i \neq k$. Число этих матриц равно шести.

$$\gamma^{21} = -i \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = -i \begin{array}{|c|c|} \hline \sigma^3 & \\ \hline & \sigma^3 \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma^{13} = -i \begin{array}{|c|c|} \hline & -i \\ \hline i & \\ \hline & -i \\ \hline & i \\ \hline \end{array} = -i \begin{array}{|c|c|} \hline \sigma^2 & \\ \hline & \sigma^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma^{32} = -i \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = -i \begin{array}{|c|c|} \hline \sigma^1 & \\ \hline & \sigma^1 \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma^{14} = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline & -1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \sigma^1 & \\ \hline & -\sigma^1 \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma^{42} = \begin{array}{|c|c|} \hline i & \\ \hline -i & \\ \hline & -i \\ \hline & i \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline -\sigma^2 & \\ \hline & \sigma^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma^{34} = \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \sigma^3 & \\ \hline & -\sigma^3 \\ \hline \end{array}$$

Для этих матриц выполняется правило перестановки индексов и, соответственно, матриц-сомножителей – условие антикоммутативности произведения матриц

$$\gamma^{ik} = -\gamma^{ki}. \quad (5)$$

Возведение в квадрат матриц γ^{ik} приводит к следующим соотношениям

$$\begin{aligned} \gamma^{21} \cdot \gamma^{21} &= -\gamma^0, & \gamma^{42} \cdot \gamma^{42} &= \gamma^0, \\ \gamma^{32} \cdot \gamma^{32} &= -\gamma^0, & \gamma^{14} \cdot \gamma^{14} &= \gamma^0, \\ \gamma^{13} \cdot \gamma^{13} &= -\gamma^0, & \gamma^{34} \cdot \gamma^{34} &= \gamma^0. \end{aligned} \quad (6)$$

- Матрицы

$$\gamma^{ikl} = \gamma^l \cdot \gamma^k \cdot \gamma^i. \quad (7)$$

Здесь

$$i \neq k, i \neq l, k \neq l.$$

Число этих матриц равно четырем.

$$\gamma^{123} = \begin{pmatrix} & 1 & \\ -1 & & \\ & -1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$$

$$\gamma^{124} = \begin{pmatrix} & -1 & \\ -1 & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \sigma^3 \\ \sigma^3 & \end{pmatrix}$$

$$\gamma^{134} = \begin{pmatrix} & i & \\ & -i & \\ -i & & \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \end{pmatrix}$$

$$\gamma^{234} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \sigma^1 \\ \sigma^1 & \end{pmatrix}$$

Для этих матриц выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, матриц-сомножителей, вытекающие из условий ассоциативности и антикоммутативности,

$$\gamma^{ikl} = \gamma^{kli} = \gamma^{lik} = -\gamma^{kil} = -\gamma^{ilk} = -\gamma^{lki}. \quad (8)$$

Возведение в квадрат матриц γ^{ikl} приводит к следующим соотношениям

$$\begin{aligned} \gamma^{123} \cdot \gamma^{123} &= -\gamma^0, & \gamma^{124} \cdot \gamma^{124} &= \gamma^0, \\ \gamma^{134} \cdot \gamma^{134} &= \gamma^0, & \gamma^{234} \cdot \gamma^{234} &= \gamma^0. \end{aligned} \quad (9)$$

• Матрица

$$\gamma^{1324} = \gamma^4 \cdot \gamma^3 \cdot \gamma^2 \cdot \gamma^1. \quad (10)$$

$$\gamma^{1324} = i \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

Для этой матрицы выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, матриц-сомножителей, также вытекающие из условий ассоциативности и антикоммутативности,

$$\begin{aligned} \gamma^{1324} &= \gamma^{1243} = \gamma^{1432} = -\gamma^{1234} = \\ -\gamma^{1342} &= -\gamma^{1423} = -\gamma^{3241} = -\gamma^{3412} = \\ -\gamma^{3124} &= \gamma^{3421} = \gamma^{3214} = \gamma^{3142} = \\ \gamma^{2413} &= \gamma^{2134} = \gamma^{2341} = -\gamma^{2143} = \\ -\gamma^{2431} &= -\gamma^{2314} = \gamma^{4132} = -\gamma^{4321} = \\ -\gamma^{4213} &= \gamma^{4312} = \gamma^{4123} = \gamma^{4231}. \end{aligned} \quad (11)$$

Возведение в квадрат матрицы γ^{1324} дает

$$\gamma^{1324} \cdot \gamma^{1324} = -\gamma^0. \quad (12)$$

Соотношения (4) – (12) позволяют рассматривать матрицы γ^I как базисные векторы специальной алгебры, которая называется алгеброй Клиффорда.*

IV. НАША ПРОГРАММА.

Теперь, после того как мы освоили

- регулярное представление базисных векторов в алгебре действия \mathbb{S} и
- алгебру матриц Дирака

вернемся к нашей задаче: найти соображения для установления алгебры действия.

Сделаем следующее предположение: пусть матрицы Дирака находятся в соответствии с матрицами регулярного представления базисных векторов алгебры действия. Тогда, во-первых, исчезает неопределенность в выборе вида алгебры действия – алгебра действия выступает как алгебра Клиффорда. И, во-вторых, исходя из правил умножения базисных векторов в алгебре Клиффорда можно установить вид структурных матриц C^L_{KI} алгебры действия. Для этих матриц при каких-то условиях уравнения структуры (19) Лекции 1 должны совпасть с квантовыми постулатами (3) Лекции 1.

Отсюда наша программа такова.

- Отождествить алгебру действия с алгеброй Клиффорда.
- Установить правила умножения базисных векторов в рассматриваемой алгебре.
- Вычислить структурные матрицы для рассматриваемой алгебры.
- Установить связь между вычисленными структурными матрицами и матрицами Дирака.

В случае успеха мы, во-первых, найдем путь к *выводу* матриц Дирака и, во-вторых, убедимся в верности выбора алгебры Клиффорда в качестве алгебры действия, найдем теоретические основания для квантовых явлений.

V. АЛГЕБРА КЛИФФОРДА.

В соответствии с нашей программой будем рассматривать алгебру действия как алгебру Клиффорда. В этом случае алгебру действия будем обозначать \mathbb{C} наряду с обозначением \mathbb{S} . Базисные векторы для алгебры Клиффорда будем обозначать ε_I , оставляя обозначение \mathbf{e}_I для общего случая.

*Ее определение будет дано в разделе V.

Закон умножения для базисных векторов ε_K алгебры Клиффорда \mathbb{C} перепишем следующим образом:

$$\varepsilon_K \circ \varepsilon_I = \varepsilon_L \cdot C_{KI}^L. \quad (13)$$

Здесь C_{KI}^L есть структурные постоянные или структурные матрицы алгебры \mathbb{C} .

Приведем свойства, определяющие алгебру Клиффорда.

- Она ассоциативна.
- Существует элемент ε_0 , изоморфный действительной единице,^{*} для которого

$$\varepsilon_0 \circ S = S \circ \varepsilon_0 = S.$$

И, в частности,[†]

$$\varepsilon_0 \circ \varepsilon_0 = \varepsilon_0.$$

- Алгебра включает в себя базисные векторы

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n,$$

называемые *образующими*.[‡] Произведения образующих векторов подчиняются условиям:

- ◊ произведение одинаковых образующих векторов

$$\varepsilon_i \circ \varepsilon_i = \text{sign } \varepsilon_i.$$

Здесь выражение $\text{sign } \varepsilon_i$ равно либо $+\varepsilon_0$ либо $-\varepsilon_0$. Оно называется *сигнатурой* базисного вектора ε_i .[§]

*Подчеркнем, что необходимость в таком элементе для искомой алгебры уже была установлена в Лекции 1 и с этой точки зрения алгебра Клиффорда подходит для нашего исследования.

[†]Отсюда следует, что \circ -умножение вектора S на вектор, пропорциональный ε_0 , эквивалентно умножению вектора S на число.

[‡]При этом имеется в виду, что остальные базисные векторы образуются из них путем умножения.

[§]Заметим, что алгебра Клиффорда, представленная матрицами Дирака имеет четыре образующих базисных матрицы

$$\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4$$

с сигнатурами соответственно

$$(+, +, +, -).$$

(Здесь в перечислении сигнатур действительная единица ε_0 опущена)

- ◊ произведение разных образующих векторов удовлетворяет условию антикоммутативности

$$\varepsilon_i \circ \varepsilon_k = -\varepsilon_k \circ \varepsilon_i.$$

Остальные базисные векторы получаются путем умножения образующих векторов (по два, по три и так далее вектора). Отсюда следует, что алгебра Клиффорда определяется числом образующих векторов и их сигнатурой.

Условие антикоммутативности позволяет переставлять (менять местами) соседние базисные векторы в произвольном произведении образующих векторов

$$\varepsilon_m \circ \dots \circ (\varepsilon_i \circ \varepsilon_k) \circ \dots \circ \varepsilon_n = -\varepsilon_m \circ \dots \circ (\varepsilon_k \circ \varepsilon_i) \circ \dots \circ \varepsilon_n,$$

Это условие в сочетании с условием ассоциативности приводит к тому, что число независимых базисных векторов, получаемых путем умножения p образующих векторов, равно числу сочетаний из n элементов по p

$$C_n^p.$$

Таким образом, общее число базисных векторов, получаемое путем всевозможных произведений образующих базисных векторов, равно

$$C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n.$$

Если к этому числу прибавить число образующих элементов, записав его в виде

$$C_n^1,$$

и единицу, соответствующую одному выделенному базисному вектору ε_0 , записав ее в виде

$$C_n^0,$$

получим общее число базисных векторов алгебры Клиффорда

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n.$$

Рассматривая это число как бином Ньютона от выражения

$$(1 + 1)^2,$$

получим общее число базисных векторов

$$N + 1 = 2^n.$$

**

**Для алгебры Клиффорда, представленной матрицами Дирака, имеем

$$N + 1 = 2^4 = 16.$$

VI. АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ КАК АЛГЕБРА КЛИФФОРДА.

В соответствии с принятой нами программой алгебра действия есть алгебра Клиффорда, образующие базисные векторы которой находятся в соответствии с образующими матрицами алгебры Дирака

$$\varepsilon_1 \sim \gamma^1, \varepsilon_2 \sim \gamma^2, \varepsilon_3 \sim \gamma^3, \varepsilon_4 \sim \gamma^4$$

с сигнатурами соответственно *

$$(+, +, +, -).$$

Общее число базисных векторов ε_I равно шестнадцати. Здесь индекс I принимает значения от 0 до 15. Укажем эти векторы и правила умножения, которым они подчиняются.

- ε_0 . Для него имеет место правило умножения

$$\varepsilon_0 \circ \varepsilon_0 = \varepsilon_0.$$

- Образующие векторы ε_i , где индекс i пробегает значения от 1 до 4. То есть, число таких векторов равно четырем. Для них имеют место правила умножения

$$\varepsilon_i \circ \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \circ \varepsilon_i = \varepsilon_i.$$

$$\varepsilon_i \circ \varepsilon_i = \text{sign } \varepsilon_i,$$

где

$$\text{sign } \varepsilon_1 = \text{sign } \varepsilon_2 = \text{sign } \varepsilon_3 = -\text{sign } \varepsilon_4 = \varepsilon_0.$$

- Векторы

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_k \circ \varepsilon_i.$$

Здесь $i \neq k$. Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6.$$

Для этих векторов выполняется правило перестановки индексов и, соответственно, сомножителей – условие антикоммутативности

$$\varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}.$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условий ассоциативности и антикоммутативности. В частности,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik} \circ \varepsilon_{ik} &= -\varepsilon_i \circ (\varepsilon_k \circ \varepsilon_k) \circ \varepsilon_i = \\ &= -\text{sign } \varepsilon_i \circ \text{sign } \varepsilon_k. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{21} \circ \varepsilon_{21} &= -\varepsilon_0, & \varepsilon_{42} \circ \varepsilon_{42} &= \varepsilon_0, \\ \varepsilon_{32} \circ \varepsilon_{32} &= -\varepsilon_0, & \varepsilon_{14} \circ \varepsilon_{14} &= \varepsilon_0, \\ \varepsilon_{13} \circ \varepsilon_{13} &= -\varepsilon_0, & \varepsilon_{34} \circ \varepsilon_{34} &= \varepsilon_0. \end{aligned}$$

- Векторы

$$\varepsilon_{ikl} = \varepsilon_l \circ \varepsilon_k \circ \varepsilon_i.$$

Здесь

$$i \neq k, i \neq l, k \neq l.$$

Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4.$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из условий ассоциативности и антикоммутативности,

$$\varepsilon_{ikl} = \varepsilon_{kli} = \varepsilon_{lik} = -\varepsilon_{kil} = -\varepsilon_{ilki} = -\varepsilon_{lki}.$$

Из указанных законов также следует

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ikl} \circ \varepsilon_{ikl} &= -\varepsilon_i \circ (\varepsilon_k \circ (\varepsilon_l \circ \varepsilon_l) \circ \varepsilon_k) \circ \varepsilon_i = \\ &= -\text{sign } \varepsilon_i \circ \text{sign } \varepsilon_k \circ \text{sign } \varepsilon_l. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} \circ \varepsilon_{123} &= -\varepsilon_0, & \varepsilon_{124} \circ \varepsilon_{124} &= \varepsilon_0, \\ \varepsilon_{134} \circ \varepsilon_{134} &= \varepsilon_0, & \varepsilon_{234} \circ \varepsilon_{234} &= \varepsilon_0. \end{aligned}$$

- Вектор

$$\varepsilon_{iklm} = \varepsilon_m \circ \varepsilon_l \circ \varepsilon_k \circ \varepsilon_i.$$

Здесь

$$i \neq k, i \neq l, i \neq m, k \neq l, k \neq m, l \neq m.$$

Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по четыре, то есть единице

$$C_4^4 = 1.$$

*Здесь в перечислении сигнатур действительная единица ε_0 опущена.

Для этих векторов выполняется правило перестановки индексов и, соответственно, соотношений, вытекающие из условий ассоциативности и антикоммутативности,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{iklm} &= \varepsilon_{ilmk} = \varepsilon_{imkl} = -\varepsilon_{ilkm} = \\ -\varepsilon_{ikml} &= -\varepsilon_{imlk} = -\varepsilon_{klmi} = -\varepsilon_{kml i} = \\ -\varepsilon_{kil m} &= \varepsilon_{kml i} = \varepsilon_{kl i m} = \varepsilon_{k i m l} = \\ \varepsilon_{lmik} &= \varepsilon_{likm} = \varepsilon_{lkmi} = -\varepsilon_{limk} = \\ -\varepsilon_{lmki} &= -\varepsilon_{lkim} = -\varepsilon_{m i k l} = -\varepsilon_{m k l i} = \\ -\varepsilon_{m l i k} &= \varepsilon_{m k i l} = \varepsilon_{m i l k} = \varepsilon_{m l k i} .\end{aligned}$$

Из указанных законов также следует

$$\begin{aligned}\varepsilon_{iklm} \circ \varepsilon_{iklm} &= \\ \varepsilon_i \circ (\varepsilon_k \circ (\varepsilon_l \circ (\varepsilon_m \circ \varepsilon_m) \circ \varepsilon_l) \circ \varepsilon_k) \circ \varepsilon_i &= \\ \text{sign } \varepsilon_i \circ \text{sign } \varepsilon_k \circ \text{sign } \varepsilon_l \circ \text{sign } \varepsilon_m .\end{aligned}$$

Откуда

$$\varepsilon_{1324} \circ \varepsilon_{1324} = -\varepsilon_0 .$$

В том случае, когда необходимо подчеркнуть размерность образующего пространства алгебры Клиффорда, мы будем использовать обозначение \mathbb{C}_4 вместо обозначения \mathbb{C} . Это особенно полезно при выделении подалгебры алгебры Клиффорда. Например, подалгебру с тремя образующими базисными векторами (например, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$), удобно обозначать \mathbb{C}_3 .

В соответствии с нашим общим замыслом мы должны для указанных базисных векторов, пользуясь правилами умножения векторов в алгебре Клиффорда, найти из (13) структурные матрицы. Затем подставить эти матрицы в уравнения структуры (19) Лекции 1 и сравнить результат с квантовыми постулатами (3) Лекции 1. В том случае, если соотношения (3) Лекции 1 будут получены, мы докажем вывод Лекции 1 о том, что причина квантовых явлений заключается в алгебраической структуре векторов действия.

Однако прежде, чем продвигаться в этом направлении, попытаемся решить другую, тесно связанную с нашим замыслом, задачу - попытаемся вывести матрицы Дирака.

VII. ВЫВОДЫ

- Можно предположить, что матрицы Дирака находятся в соответствии со структурными матрицами искомой алгебры действия.
- Тогда алгебра действия есть алгебра Клиффорда с четырьмя образующими базисными векторами с сигнатурами

$$(+, +, +, -).$$

- Матрицы Дирака необходимо получить как результат вычисления структурных матриц для алгебры Клиффорда.

ПРИЛОЖЕНИЕ: УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ И УМНОЖЕНИЕ БАЗИСНЫХ ВЕКТОРОВ*.

Необходимость умножать матрицы регулярного представления в обратном порядке делает запись регулярного представления несколько не эстетичной. Это связано с принятой формой записи матриц.

Для матриц принято следующее обозначение

$$a_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Отсюда следует, что первый индекс (i) нумерует строки, а второй - (k) нумерует столбцы. В частности, столбец имеет вид

$$a_{i.} = \begin{vmatrix} a_{1.} \\ a_{2.} \\ \vdots \\ a_{n.} \end{vmatrix} .$$

А строка

$$a_{.k} = \begin{vmatrix} a_{.1} & a_{.2} & \dots & a_{.n} \end{vmatrix} .$$

Принято для вектора-столбца использовать верхний индекс

$$a^i_{.} = \begin{vmatrix} a^1_{.} \\ a^2_{.} \\ \vdots \\ a^n_{.} \end{vmatrix} ,$$

а для вектора-строки использовать нижний индекс

$$a_{.k} = \begin{vmatrix} a_{.1} & a_{.2} & \dots & a_{.n} \end{vmatrix} .$$

Таким образом, матрицу надо обозначать так

$$a^i_{.k} .$$

Здесь верхний левый индекс нумерует строки, а нижний правый индекс нумерует столбцы. Умножение матриц имеет вид

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{kj} .$$

*Этот раздел посвящен техническому вопросу и может быть опущен при первом чтении.

Поэтому оно должно быть записано так [†]

$$c_j^i = a_k^i \cdot b_j^k.$$

Также

$$c_i = \sum_k a_{ik} \cdot b_k.$$

записывается так

$$c^i = a_k^i \cdot b^k.$$

Отсюда надо писать

$$x = \mathbf{e}_k \cdot x^k.$$

Таким образом, закон умножения базисных векторов надо записывать так

$$\mathbf{e}_K \circ \mathbf{e}_I = \mathbf{e}_L \cdot C_{KI}^L.$$

Здесь базисный вектор с номером матрицы умножается справа на базисный вектор с номером столбца. Этому умножению соответствует ранее выведенное умножение структурных матриц

$$C_{LI}^M \cdot C_{NK}^L = C_{NL}^M \cdot C_{KI}^L.$$

Причем соответствующие матрицы умножаются в обратном порядке.

Если считать изменение порядка умножения соответствующих матриц не эстетичным и стремиться к соответствию порядка умножения матриц порядку умножения базисных векторов, то тогда необходимо переопределить матрицу. Действительно, переобозначим матрицу следующим образом

$$a_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

То есть, будем считать, что первый индекс (i) нумерует столбцы, а второй - (k) нумерует строки. В частности, столбец имеет вид

$$a_{.k} = \begin{vmatrix} a_{.1} \\ a_{.2} \\ \vdots \\ a_{.n} \end{vmatrix}.$$

А строка

$$a_{i.} = \left| \begin{array}{cccc} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{array} \right|.$$

По прежнему для вектора-столбца будем использовать верхний индекс

$$a_{.i} = \begin{vmatrix} a_{.1} \\ a_{.2} \\ \vdots \\ a_{.n} \end{vmatrix},$$

а для вектора-строки будем использовать нижний индекс

$$a_{k.} = \left| \begin{array}{cccc} a_{1.} & a_{2.} & \dots & a_{n.} \end{array} \right|.$$

Таким образом, матрицу надо обозначать так

$$a_i^k,$$

где нижний левый индекс нумерует столбцы, а правый верхний индекс нумерует строки. Умножение матриц также переопределим

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Оно запишется следующим образом *

$$c_i^j = a_i^k \cdot b_k^j.$$

Также

$$c_{i.} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{k.}$$

записывается так

$$c_i = a_i^k \cdot b_k.$$

Отсюда надо писать

$$x = x^k \cdot \mathbf{e}_k.$$

Таким образом, закон умножения базисных векторов надо записывать так

$$\mathbf{e}_K \circ \mathbf{e}_I = C_{IK}^L \cdot \mathbf{e}_L. \quad (A1)$$

Здесь как и прежде базисный вектор с номером матрицы умножается справа на базисный вектор с номером столбца. Этому умножению соответствует умножение структурных матриц, выводимое следующим образом. Запишем условие ассоциативности для произведения трех базисных векторов

$$(\mathbf{e}_N \circ \mathbf{e}_K) \circ \mathbf{e}_I = \mathbf{e}_N \circ (\mathbf{e}_K \circ \mathbf{e}_I).$$

Отсюда, используя закон умножения базисных векторов, получим

[†]Это умножение удобно обозначить как /-умножение.

*Это умножение удобно обозначить как \-умножение.

$$C_{KN}^L \cdot (\mathbf{e}_L \circ \mathbf{e}_I) = C_{IK}^L \cdot (\mathbf{e}_N \circ \mathbf{e}_L).$$

Откуда

$$C_{KN}^L \cdot C_{IL}^M = C_{IK}^L \cdot C_{LN}^M. \quad (\text{A2})$$

Сравнивая это выражение с самим законом умножения базисных векторов (A1), заключаем, что базисным векторам \mathbf{e}_I можно поставить в соответствие структурные матрицы C_{IK}^L . При этом \circ – умножению базисных векторов ставится в соответствие переопределенное умножение матриц, причем порядок умножения матриц *совпадает* с порядком умножения базисных векторов. Таким образом, для эстетики регулярного представления необходимо переопределить запись и умножение матриц. Но поскольку это не в наших силах будем пользоваться принятым умножением матриц, но не эстетичным соответствием умножения матриц и умножения базисных векторов.

$$C_{LI}^M \cdot C_{NK}^L = C_{NL}^M \cdot C_{KI}^L.$$

Причем соответствующие матрицы умножаются в обратном порядке.