Лекция 4. Контравариантная алгебра действия и квантовые постулаты.

А. А. Кецарис
(4 июля 2003 г.)

В этой лекции мы завершаем объяснение квантовых явлений алгебраической структурой векторов действия.

I. ВВЕДЕНИЕ

Обогащенные опытом вывода матриц Дирака, вернемся к вычислению структурных матриц контравариантной алгебры действия. Обращение к матрицам Дирака научило нас следующему:

1. Компоненты векторов и матриц необходимо рассматривать в следующей последовательности индексов

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123)$$

– для подалгебры $\mathbb{C}_3$ и

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124)$$

– для алгебры $\mathbb{C}_4$.

2. Переход от действительного представления к комплексному и кватернионному осуществляется путем введения соответствующих блочных матриц.

3. При переходе к частным случаям квантовой теории целесообразно пользоваться процедурой сжатия, или вырождения слагаемых компонент вектора.

Итак, в соответствии с нашим общим замыслом мы должны, пользуясь правилами умножения векторов в алгебре Клиффорда $\mathbb{C}$, найти структурные матрицы этой алгебры. Затем подставить эти матрицы в уравнения структуры (Л1.19) и сравнить результат с квантовыми постулатами (Л1.3). В том случае, если соотношения (Л1.3) будут получены, мы подтвердим вывод Лекции 1 о том, что причина квантовых явлений заключается в алгебраической структуре векторов действия.

II. СТРУКТУРНЫЕ МАТРИЦЫ КОНТРАВАРИАНТНОЙ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА.

Далее рассмотрим структурные матрицы, которыми представляются базисные векторы алгебры Клиффорда $\mathbb{C}$:

$$\varepsilon_I \sim C^L{}_{KI}\ .$$

Номер структурной матрицы I есть индекс базисного вектора, который может быть представлен этой матрицей.

Напомним, что закон умножения базисных векторов в алгебре Клиффорда $\mathbb{C}$ был записан нами следующим образом

$$\varepsilon_K \circ \varepsilon_I = \varepsilon_L \cdot C^L{}_{KI}\ . \tag{1}$$

Сравнивая закон умножения (1) с законом умножения базисных векторов для алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}$ (см. соотношение (Л3.4)), мы отмечаем два существенных различия этих законов между собой.

1. Они имеют разный порядок умножения базисных векторов. Для (1) базисный вектор с номером структурной матрицы занимает правое место в произведении, а для алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}$ базисный вектор с номером структурной матрицы занимает левое место в произведении базисных векторов.

2. Базисные векторы ε_K в матричном виде изображаются вектором-строкой, а базисные векторы $\mathcal{E}^K$ изображаются вектором-столбцом.

Вполне естественно ожидать, что указанные отличия приведут к существенным отличиям структурных матриц рассматриваемой алгебры от структурных матриц алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}$. Вместе с тем, с одной стороны, нужно понимать, что указанные отличия законов умножения являются в определенном смысле взаимно дополнительными. Поэтому следует ожидать, что структурные матрицы алгебр $\mathbb{C}$ и $\widetilde{\mathbb{C}}$ также являются в некотором смысле взаимно дополнительными. С другой стороны, нужно помнить, что структурные матрицы алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}$ в частном случае представляют собой матрицы Дирака, ключевые для квантовой теории. Отсюда следует важный вывод: роль искомых нами структурных матриц для алгебры $\mathbb{C}$ должна быть столь же существенна как и матриц Дирака.

Итак приступим к вычислению структурных матриц алгебры $\mathbb{C}$.

1. Действительное представление контравариантной алгебры Клиффорда.

Из (1) следует алгоритм вычисления структурных матриц, соответствующих базисным векторам. Сначала нужно установить номер структурной матрицы (I) в соответствии с номером базисного вектора, затем для каждого столбца матрицы (K) проделать следующие вычисления. Базисный вектор ε_K, номер которого совпадает с номером *столбца* матрицы, нужно умножить *справа* на базисный вектор ε_I, номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор ε_L, на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер (L) указанного базисного вектора определит номер строки, на пересечении которой с рассматриваемым столбцом, необходимо поставить указанное численное значение проекции.

Теперь вычислим структурные матрицы $C^L{}_{KI}$ по приведенному алгоритму для двух случаев

1. подалгебра $\mathbb{C}_3$ с тремя образующими базисными векторами ε_1, ε_2, ε_3;

2. алгебра $\mathbb{C}_4$ с четырьмя образующими базисными векторами ε_1, ε_2, ε_3, ε_4.

Для подалгебры $\mathbb{C}_3$ будем вычислять структурные матрицы для особого порядка индексов:*

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123)\,.$$

То есть, будем записывать слагаемые вектора ψ в следующей последовательности

$$\psi = \varepsilon_{32}\,\psi^{32} + \varepsilon_{13}\,\psi^{13} + \varepsilon_{21}\,\psi^{21} + \varepsilon_0\,\psi^0 + \varepsilon_1\,\psi^1 + \varepsilon_2\,\psi^2 + \varepsilon_3\,\psi^3 + \varepsilon_{123}\,\psi^{123}\,.$$

В результате получим действительные структурные матрицы 8×8 представления базисных векторов ε_K. (См. Раздел II 5).

Для алгебры $\mathbb{C}_4$ будем вычислять структурные матрицы для особого порядка индексов, обобщающего предыдущий порядок индексов,

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124)\,.$$

То есть, будем записывать слагаемые вектора ψ в следующей последовательности

$$\begin{aligned}\psi = {}&\varepsilon_{32}\,\psi^{32} + \varepsilon_{13}\,\psi^{13} + \varepsilon_{21}\,\psi^{21} + \varepsilon_0\,\psi^0 +\\ &\varepsilon_{42}\,\psi^{42} + \varepsilon_{14}\,\psi^{14} + \varepsilon_{1324}\,\psi^{1324} + \varepsilon_{34}\,\psi^{34} +\\ &\varepsilon_1\,\psi^1 + \varepsilon_2\,\psi^2 + \varepsilon_3\,\psi^3 + \varepsilon_{123}\,\psi^{123} +\\ &\varepsilon_{134}\,\psi^{134} + \varepsilon_{234}\,\psi^{234} + \varepsilon_4\,\psi^4 + \varepsilon_{124}\,\psi^{124}\,.\end{aligned}$$

В результате получим действительные матрицы 16×16 представления базисных векторов ε_K. (См. Раздел II 5).

Помимо действительного представления будем использовать *комплексное*, *кватернионное* и *бикватернионное* представления базисных векторов алгебры Клиффорда, удобные в силу своей компактности.

*Приведенный порядок индексов оправдан тем, что для него структурные матрицы контравариантной алгебры Клиффорда представлены матрицами Дирака (см. Лекцию 3).

2. Комплексное представление контравариантной алгебры Клиффорда.

1. подалгебра $\mathbb{C}_3$.

Комплексное представление основано на следующем разложении вектора:

$$\psi = \varepsilon_{13}\circ(\varepsilon_{21}\,\psi^{32} + \varepsilon_0\,\psi^{13}) + \varepsilon_0\circ(\varepsilon_{21}\,\psi^{21} + \varepsilon_0\,\psi^0) + \varepsilon_2\circ(\varepsilon_{21}\,\psi^1 + \varepsilon_0\,\psi^2) + \varepsilon_{123}\circ(\varepsilon_{21}\,\psi^3 + \varepsilon_0\,\psi^{123})\,.$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{C}_3$ в виде произведения $\mathbb{C}_2\times\mathbb{C}_1$ (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_2$ являются

$$\varepsilon_{13}\,,\quad \varepsilon_0\,,\quad \varepsilon_2\,,\quad \varepsilon_{123}\,;$$

базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_1$ являются

$$\varepsilon_{21}\,,\quad \varepsilon_0\,.$$

Пространство $\mathbb{C}_1$ можно рассматривать как пространство комплексных чисел. Для этого базисному вектору ε_{21} алгебры $\mathbb{C}_1$ поставим в соответствие мнимую единицу i, имея в виду, что $\operatorname{sign}\varepsilon_{21} = -1$, а базисному вектору ε_0 алгебры $\mathbb{C}_1$ поставим в соответствие действительную единицу†.

$$\varepsilon_{21}\sim i\,,\quad \varepsilon_0\sim 1\,.$$

В результате получим вектор алгебры $\mathbb{C}_3$ в комплексном представлении

$$\begin{aligned}\psi \;=\; &\varepsilon_{13}\circ(i\,\psi^{32} + \psi^{13}) + \varepsilon_0\circ(i\,\psi^{21} + \psi^0) +\\ &\varepsilon_2\circ(i\,\psi^1 + \psi^2) + \varepsilon_{123}\circ(i\,\psi^3 + \psi^{123})\,.\end{aligned}\tag{2}$$

Таким образом, в комплексном представлении координаты (компоненты) вектора являются комплексными. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}^{13} &= i\,\psi^{32} + \psi^{13}\,, &\quad \boldsymbol{\psi}^0 &= i\,\psi^{21} + \psi^0\,,\\ \boldsymbol{\psi}^2 &= i\,\psi^1 + \psi^2\,, &\quad \boldsymbol{\psi}^{123} &= i\,\psi^3 + \psi^{123}\,.\end{aligned}\tag{3}$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$\psi = \varepsilon_{13}\,\boldsymbol{\psi}^{13} + \varepsilon_0\,\boldsymbol{\psi}^0 + \varepsilon_2\,\boldsymbol{\psi}^2 + \varepsilon_{123}\,\boldsymbol{\psi}^{123}\,.\tag{4}$$

Отсюда видно, что в комплексном представлении вектор ψ проецируется на направления ε_{13}, ε_0, ε_2, ε_{123}.

Комплексное представление базисных векторов дается структурными матрицами 4×4 (см. Раздел II 5).

†Этот выбор найдет обоснование в разделе IIIC.

2. алгебра $\mathbb{C}_4$.

Комплексное представление в этом случае основано на следующем разложении вектора:

$$\psi = \varepsilon_{13} \circ (\varepsilon_{21}\,\psi^{32} + \varepsilon_0\,\psi^{13}) + \varepsilon_0 \circ (\varepsilon_{21}\,\psi^{21} + \varepsilon_0\,\psi^{0}) + \\ \varepsilon_{14} \circ (\varepsilon_{21}\,\psi^{42} + \varepsilon_0\,\psi^{14}) + \varepsilon_{34} \circ (\varepsilon_{21}\,\psi^{1324} + \varepsilon_0\,\psi^{34}) + \\ \varepsilon_{2} \circ (\varepsilon_{21}\,\psi^{1} + \varepsilon_0\,\psi^{2}) + \varepsilon_{123} \circ (\varepsilon_{21}\,\psi^{3} + \varepsilon_0\,\psi^{123}) + \\ \varepsilon_{234} \circ (\varepsilon_{21}\,\psi^{134} + \varepsilon_0\,\psi^{234}) + \varepsilon_{124} \circ (\varepsilon_{21}\,\psi^{4} + \varepsilon_0\,\psi^{124}) .$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{C}_4$ в виде произведения $\mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_1$ (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_3$ являются

$$\varepsilon_{13}\,, \varepsilon_{0}\,, \varepsilon_{14}\,, \varepsilon_{34}\,, \varepsilon_{2}\,, \varepsilon_{123}\,, \varepsilon_{234}\,, \varepsilon_{124}\,;$$

базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_1$ являются

$$\varepsilon_{21}\,, \quad \varepsilon_0\,.$$

Как и прежде поставим в соответствие базисному вектору ε_{21} алгебры $\mathbb{C}_1$ мнимую единицу i, а базисному вектору ε_0 действительную единицу. В результате получим вектор алгебры $\mathbb{C}_4$ в комплексном представлении имеет вид

$$\psi = \varepsilon_{13} \circ (i\,\psi^{32} + \psi^{13}) + \varepsilon_0 \circ (i\,\psi^{21} + \psi^{0}) + \\ \varepsilon_{14} \circ (i\,\psi^{42} + \psi^{14}) + \varepsilon_{34} \circ (i\,\psi^{1324} + \psi^{34}) + \\ \varepsilon_{2} \circ (i\,\psi^{1} + \psi^{2}) + \varepsilon_{123} \circ (i\,\psi^{3} + \psi^{123}) + \\ \varepsilon_{234} \circ (i\,\psi^{134} + \psi^{234}) + \varepsilon_{124} \circ (i\,\psi^{4} + \psi^{124}) .$$

Таким образом, в комплексном представлении координаты (компоненты) вектора являются комплексными. Введем для них обозначение

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{\psi}^{13} = i\,\psi^{32} + \psi^{13}\,, & \boldsymbol{\psi}^{0} = i\,\psi^{21} + \psi^{0}\,, \\ \boldsymbol{\psi}^{14} = i\,\psi^{42} + \psi^{14}\,, & \boldsymbol{\psi}^{34} = i\,\psi^{1324} + \psi^{34}\,, \\ \boldsymbol{\psi}^{2} = i\,\psi^{1} + \psi^{2}\,, & \boldsymbol{\psi}^{123} = i\,\psi^{3} + \psi^{123}\,, \\ \boldsymbol{\psi}^{234} = i\,\psi^{134} + \psi^{234}\,, & \boldsymbol{\psi}^{124} = i\,\psi^{4} + \psi^{124}\,. \end{array} \tag{5}$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$\psi = \varepsilon_{13}\,\boldsymbol{\psi}^{13} + \varepsilon_0\,\boldsymbol{\psi}^{0} + \varepsilon_{14}\,\boldsymbol{\psi}^{14} + \varepsilon_{34}\,\boldsymbol{\psi}^{34} + \\ \varepsilon_{2}\,\boldsymbol{\psi}^{2} + \varepsilon_{123}\,\boldsymbol{\psi}^{123} + \varepsilon_{234}\,\boldsymbol{\psi}^{234} + \varepsilon_{124}\,\boldsymbol{\psi}^{124} .$$

Отсюда видно, что в комплексном представлении вектор ψ проецируется на направления ε_{13}, ε_0,ε_{14}, ε_{34}, ε_2, ε_{123}, ε_{234}, ε_{124}.

Комплексное представление базисных векторов дается структурными матрицами 8×8 (см. Раздел II 5).

Назовем базисный вектор ε_{21} *основным* в связи с тем положением, которое он занимает в комплексном представлении. С алгебраической точки зрения направления ε_{13} и ε_{32} эквивалентны направлению ε_{21} и также могут быть приняты за основное. Для того, чтобы отличить эти случаи от предыдущего, будем обозначать мнимую единицу через j, если за основное направление принят вектор ε_{13}, и обозначать мнимую единицу через k, если за основное направление принят вектор ε_{32}. Указанное выделение базисных векторов, участвующих в комплексном представлении, оказывается существенным для описания фундаментальных частиц разных поколений. (См. Лекцию 5.)

3. Кватернионное представление контравариантной алгебры Клиффорда.

1. подалгебра $\mathbb{C}_3$.

Кватернионное представление подалгебры $\mathbb{C}_3$ основано на разложении вектора:

$$\psi = (\varepsilon_{32}\,\psi^{32} + \varepsilon_{13}\,\psi^{13} + \varepsilon_{21}\,\psi^{21} + \varepsilon_0\,\psi^{0}) \circ \varepsilon_0 + \\ (\varepsilon_{32}\,\psi^{1} + \varepsilon_{13}\,\psi^{2} + \varepsilon_{21}\,\psi^{3} + \varepsilon_0\,\psi^{123}) \circ \varepsilon_{123} .$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{C}_3$ в виде произведения $\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2$. Базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_1$ являются

$$\varepsilon_0\,, \quad \varepsilon_{123}\,;$$

базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_2$ являются

$$\varepsilon_{32}\,, \quad \varepsilon_{13}\,, \quad \varepsilon_{21}\,, \quad \varepsilon_0\,.$$

Последняя алгебра является алгеброй кватернионов, так как

$$\operatorname{sign}\varepsilon_{32} = \operatorname{sign}\varepsilon_{13} = \operatorname{sign}\varepsilon_{21} = -1\,, \quad \operatorname{sign}\varepsilon_0 = 1\,.$$

Для базисных кватернионов используем следующие обозначения*

$$a \cdot I\,, \quad b \cdot I\,, \quad i \cdot 1\,, \quad 1\,.$$

Заменим базисные векторы ε_{32}, ε_{13}, ε_{21}, ε_0 кватернионами в соответствии

$$\begin{array}{l} \varepsilon_{32} \sim a\,I\,, \\ \varepsilon_{13} \sim b\,I\,, \\ \varepsilon_{21} \sim i\,\mathbb{1}\,, \\ \varepsilon_{0} \sim 1\,\mathbb{1}\,. \end{array}$$

Получим вектор алгебры $\mathbb{C}_3$ в кватернионном представлении

$$\psi = (a \cdot I\,\psi^{32} + b \cdot I\,\psi^{13} + i \cdot 1\,\psi^{21} + \psi^{0}) \circ \varepsilon_0 + \\ (a \cdot I\,\psi^{1} + b \cdot I\,\psi^{2} + i \cdot 1\,\psi^{3} + \psi^{123}) \circ \varepsilon_{123} .$$

Таким образом, в кватернионном представлении координаты(компоненты) вектора являются кватернионами. Введем для них обозначение

---

*Этот выбор найдет обоснование в разделе IIIB.

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= a\, I\, \psi^{32} + b\, I\, \psi^{13} + i\, \psi^{21} + \psi^0 \,, \\ \Psi^{123} &= a\, I\, \psi^1 \;\; + b\, I\, \psi^2 \;\; + i\, \psi^3 \;\; + \psi^{123} \,. \end{aligned} \tag{6}$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$\psi = \Psi^0 \, \varepsilon_0 + \Psi^{123} \, \varepsilon_{123} \,.$$

Отсюда видно, что в кватернионном представлении вектор ψ проецируется на направления ε_0, ε_{123}.

Кватернионное представление базисных векторов дается структурными матрицами 2×2 (см. Раздел II 5).

2. алгебра $\mathbb{C}_4$.

Кватернионное представление алгебры $\mathbb{C}_4$ основано на разложении вектора:

$$\begin{aligned} \psi = {} & (\varepsilon_{32}\, \psi^{32} + \varepsilon_{13}\, \psi^{13} + \varepsilon_{21}\, \psi^{21} + \varepsilon_0\, \psi^0) \circ \varepsilon_0 + \\ & (\varepsilon_{32}\, \psi^{42} + \varepsilon_{13}\, \psi^{14} + \varepsilon_{21}\, \psi^{1324} + \varepsilon_0\, \psi^{34}) \circ \varepsilon_{34} + \\ & (\varepsilon_{32}\, \psi^{1} + \varepsilon_{13}\, \psi^{2} + \varepsilon_{21}\, \psi^{3} + \varepsilon_0\, \psi^{123}) \circ \varepsilon_{123} + \\ & (\varepsilon_{32}\, \psi^{134} + \varepsilon_{13}\, \psi^{234} + \varepsilon_{21}\, \psi^{4} + \varepsilon_0\, \psi^{124}) \circ \varepsilon_{124} \,. \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{C}_4$ в виде произведения $\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2$. Базисными векторами одной алгебры $\mathbb{C}_2$ являются

$$\varepsilon_0 \,, \quad \varepsilon_{34} \,, \quad \varepsilon_{123} \,, \quad \varepsilon_{124} \,;$$

базисными векторами другой алгебры $\mathbb{C}_2$ являются

$$\varepsilon_{32} \,, \quad \varepsilon_{13} \,, \quad \varepsilon_{21} \,, \quad \varepsilon_0 \,.$$

Как и прежде заменяя базисные векторы ε_{32}, ε_{13},ε_{21}, ε_0 кватернионами, получим вектор алгебры $\mathbb{C}_4$ в кватернионном представлении

$$\begin{aligned} \psi = {} & (a \cdot I\, \psi^{32} + b \cdot I\, \psi^{13} + i \cdot 1\, \psi^{21} + \psi^0) \circ \varepsilon_0 + \\ & (a \cdot I\, \psi^{42} + b \cdot I\, \psi^{14} + i \cdot 1\, \psi^{1324} + \psi^{34}) \circ \varepsilon_{34} + \\ & (a \cdot I\, \psi^{1} + b \cdot I\, \psi^{2} + i \cdot 1\, \psi^{3} + \psi^{123}) \circ \varepsilon_{123} + \\ & (a \cdot I\, \psi^{134} + b \cdot I\, \psi^{234} + i \cdot 1\, \psi^{4} + \psi^{124}) \circ \varepsilon_{124} \,. \end{aligned}$$

Таким образом, в кватернионном представлении координаты (компоненты) вектора являются кватернионами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= a\, I\, \psi^{32} \;\, + b\, I\, \psi^{13} \;\, + i\, \psi^{21} \;\;\; + \psi^0 \,, \\ \Psi^{34} &= a\, I\, \psi^{42} \;\, + b\, I\, \psi^{14} \;\, + i\, \psi^{1324} + \psi^{34} \,, \\ \Psi^{123} &= a\, I\, \psi^{1} \;\;\; + b\, I\, \psi^{2} \;\;\; + i\, \psi^{3} \;\;\;\; + \psi^{123} \,, \\ \Psi^{124} &= a\, I\, \psi^{134} + b\, I\, \psi^{234} + i\, \psi^{4} \;\;\;\; + \psi^{124} \,. \end{aligned} \tag{7}$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$\psi = \Psi^0 \, \varepsilon_0 + \Psi^{34} \, \varepsilon_{34} + \Psi^{123} \, \varepsilon_{123} + \Psi^{124} \, \varepsilon_{124} \,.$$

Отсюда видно, что в кватернионном представлении вектор ψ проецируется на направления ε_0, ε_{34}, ε_{123}, ε_{124}.

Кватернионное представление базисных векторов дается структурными матрицами 4×4 (см. Раздел II 5).

4. Бикватернионное представление контравариантной алгебры Клиффорда.

1. подалгебра $\mathbb{C}_3$.

Назовем бикватернионами числа вида

$$\begin{aligned} b_0 \cdot \alpha^0 + b_1 \cdot \alpha^1 + b_2 \cdot \alpha^2 + b_3 \cdot \alpha^3 + \\ b_4 \cdot \alpha^4 + b_5 \cdot \alpha^5 + b_6 \cdot \alpha^6 + b_7 \cdot \alpha^7 \,, \end{aligned}$$

где α^0, α^1, α^2, α^3, α^4, α^5, α^6, α^7 –действительные числа, а b_0, b_1, b_2, b_3, b_0, b_1, b_2, b_3 – базисные бикватернионы, для которых выполняются следующие правила умножения

$$\begin{aligned} & b_i \circ b_i = b_0 \,, && i = 0\,, 4\,, 5\,, 6\,, \\ & b_k \circ b_k = -b_0 \,, && k = 1\,, 2\,, 3\,, 7\,, \\ & b_i \circ b_k = -b_k \circ b_i \,, && i \neq k\,, i\,, k \neq 0\,, \neq 7\,, \\ & b_i \circ b_k = b_k \circ b_i \,, && k = 0\,, 7\,. \end{aligned}$$

Обратимся снова к вектору алгебры $\mathbb{C}_3$

$$\begin{aligned} \psi = \varepsilon_{32}\, \psi^{32} + \varepsilon_{13}\, \psi^{13} + \varepsilon_{21}\, \psi^{21} + \varepsilon_0\, \psi^0 + \\ \varepsilon_1\, \psi^1 + \varepsilon_2\, \psi^2 + \varepsilon_3\, \psi^3 + \varepsilon_{123}\, \psi^{123} \,. \end{aligned}$$

Базисные векторы

$$\varepsilon_{32}\,, \varepsilon_{13}\,, \varepsilon_{21}\,, \varepsilon_0\,, \varepsilon_1\,, \varepsilon_2\,, \varepsilon_3\,, \varepsilon_{123} \,.$$

можно рассматривать как базисные бикватернионы. Для этого случая мы будем пользоваться переобозначением

$$\begin{aligned} \varepsilon_{32} \sim b_{32}\,, \;\; \varepsilon_{13} \sim b_{13}\,, \;\; \varepsilon_{21} \sim b_{21}\,, \quad \varepsilon_0 \sim b_0\,, \\ \varepsilon_1 \sim b_1\,, \quad \varepsilon_2 \sim b_2\,, \quad \varepsilon_3 \sim b_3\,, \quad \varepsilon_{123} \sim b_{123} \,. \end{aligned}$$

2. алгебра $\mathbb{C}_4$.

Биватернионное представление алгебры $\mathbb{C}_4$ основано на разложении вектора:

$$\begin{aligned} \psi = {} & (\varepsilon_{32}\, \psi^{32} + \varepsilon_{13}\, \psi^{13} + \varepsilon_{21}\, \psi^{21} + \varepsilon_0\, \psi^0 + \\ & \quad \varepsilon_1\, \psi^1 + \varepsilon_2\, \psi^2 + \varepsilon_3\, \psi^3 + \varepsilon_{123}\, \psi^{123}) \circ \varepsilon_0 + \\ & (\varepsilon_{32}\, \psi^{42} + \varepsilon_{13}\, \psi^{14} + \varepsilon_{21}\, \psi^{1324} + \varepsilon_0\, \psi^{34} + \\ & \quad \varepsilon_1\, \psi^{134} + \varepsilon_2\, \psi^{234} + \varepsilon_3\, \psi^4 + \varepsilon_{123}\, \psi^{124}) \circ \varepsilon_{34} \,. \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{C}_4$ в виде произведения $\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_3$. Базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_1$ являются

$$\varepsilon_0 \,, \quad \varepsilon_{34} \,,$$

базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_3$ являются

$$\varepsilon_{32}\,, \varepsilon_{13}\,, \varepsilon_{21}\,, \varepsilon_0\,, \varepsilon_1\,, \varepsilon_2\,, \varepsilon_3\,, \varepsilon_{123} \,.$$

Заменяя эти базисные векторы базисными бикватернионами, получим вектор алгебры $\mathbb{C}_3$ в бикватернионном представлении

$$
\begin{aligned}
\psi = (& b_{32}\,\psi^{32} + b_{13}\,\psi^{13} + b_{21}\,\psi^{21} + b_0\,\psi^0 + \\
& \quad b_1\,\psi^1 + b_2\,\psi^2 + b_3\,\psi^3 + b_{123}\,\psi^{123}) \circ \varepsilon_0 + \\
(& b_{32}\,\psi^{42} + b_{13}\,\psi^{14} + b_{21}\,\psi^{1324} + b_0\,\psi^{34} + \\
& \quad b_1\,\psi^{134} + b_2\,\psi^{234} + b_3\,\psi^4 + b_{123}\,\psi^{124}) \circ \varepsilon_{34}\,.
\end{aligned}
$$

Таким образом, в бикватернионном представлении координаты (компоненты) вектора являются бикватернионами. Введем для них обозначение

$$
\begin{aligned}
\Psi^0 &= b_{32}\,\psi^{32} + b_{13}\,\psi^{13} + b_{21}\,\psi^{21} + b_0\,\psi^0 \\
&\quad + b_1\,\psi^1 + b_2\,\psi^2 + b_3\,\psi^3 + b_{123}\,\psi^{123}\,, \\
\Psi^{34} &= b_{32}\,\psi^{42} + b_{13}\,\psi^{14} + b_{21}\,\psi^{1324} + b_0\,\psi^{34} \\
&\quad + b_1\,\psi^{134} + b_2\,\psi^{234} + b_3\,\psi^4 + b_{123}\,\psi^{124}\,.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$\psi = \Psi^0\,\varepsilon_0 + \Psi^{34}\,\varepsilon_{34}\,.$$

Отсюда видно, что в бикватернионном представлении вектор ψ проецируется на направления ε_0, ε_{34}.

5. Структурные матрицы контравариантной алгебры Клиффорда.

Приведем структурные матрицы алгебры Клиффорда, которые реализуют регулярное представление базисных векторов:

$$\varepsilon_I \sim C^L{}_{KI}\,.$$

При преобразовании матриц $C^L{}_{KI}$ от действительного представления к комплексному использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$\mathit{1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \quad a = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\,, \quad b = \begin{array}{|c|c|}\hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \quad i = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline\end{array}\,.$$

Алгебра системы чисел $\{\mathit{1}, a, b, i\}$ представлена законами умножения:

$$
\begin{gathered}
a^2 = b^2 = \mathit{1}\,, \qquad i^2 = -\mathit{1}\,, \qquad a\,b = -b\,a = i\,, \\
a\,i = -i\,a = b\,, \qquad i\,b = -b\,i = a\,.
\end{gathered}
$$

При преобразовании матриц $C^L{}_{KI}$ от комплексного представления к кватернионному использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$\mathbb{1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \qquad I = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline\end{array}\,.$$

1. Подалгебра $\mathbb{C}_3$

$$
\varepsilon_0 \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & 1 & & & & & & & \\
13 & & 1 & & & & & & \\
21 & & & 1 & & & & & \\
0 & & & & 1 & & & & \\ \hline
1 & & & & & 1 & & & \\
2 & & & & & & 1 & & \\
3 & & & & & & & 1 & \\
123 & & & & & & & & 1 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
1 & & & & 13 \\
 & 1 & & & 0 \\ \hline
 & & 1 & & 2 \\
 & & & 1 & 123 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
\mathbb{1} & & 0 \\ \hline
 & \mathbb{1} & 123 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon_1 \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & & & & & -1 \\
13 & & & & & & & -1 & \\
21 & & & & & & 1 & & \\
0 & & & & & 1 & & & \\ \hline
1 & & & & 1 & & & & \\
2 & & & 1 & & & & & \\
3 & & -1 & & & & & & \\
123 & -1 & & & & & & & \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & & -1 & 13 \\
 & & 1 & & 0 \\ \hline
 & 1 & & & 2 \\
-1 & & & & 123 \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & -I & 0 \\ \hline
I & & 123 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon_2 \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & & & & 1 & \\
13 & & & & & & & & -1 \\
21 & & & & & -1 & & & \\
0 & & & & & & 1 & & \\ \hline
1 & & & -1 & & & & & \\
2 & & & & 1 & & & & \\
3 & 1 & & & & & & & \\
123 & & -1 & & & & & & \\ \hline
\end{array}
= b
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & & -1 & 13 \\
 & & 1 & & 0 \\ \hline
 & 1 & & & 2 \\
-1 & & & & 123 \\ \hline
\end{array}
= b
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & -I & 0 \\ \hline
I & & 123 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon_3 \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & & & -1 & & \\
13 & & & & & 1 & & & \\
21 & & & & & & & & -1 \\
0 & & & & & & & 1 & \\ \hline
1 & & 1 & & & & & & \\
2 & -1 & & & & & & & \\
3 & & & & 1 & & & & \\
123 & & & -1 & & & & & \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & -1 & & 13 \\
 & & & -1 & 0 \\ \hline
1 & & & & 2 \\
 & 1 & & & 123 \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & -\mathbb{1} & 0 \\ \hline
\mathbb{1} & & 123 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon_{21} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
52 & & 1 & & & & & & \\
13 & -1 & & & & & & & \\
21 & & & & 1 & & & & \\
0 & & & -1 & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & 1 & & \\
2 & & & & & -1 & & & \\
3 & & & & & & & & 1 \\
123 & & & & & & & -1 & \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
1 & & & & 13 \\
 & 1 & & & 0 \\ \hline
 & & 1 & & 2 \\
 & & & 1 & 123 \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
\mathbb{1} & & 0 \\ \hline
 & \mathbb{1} & 123 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon_{13} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & -1 & & & & & \\
13 & & & & 1 & & & & \\
21 & 1 & & & & & & & \\
0 & & -1 & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & -1 & \\
2 & & & & & & & & 1 \\
3 & & & & & 1 & & & \\
123 & & & & & & -1 & & \\ \hline
\end{array}
= b
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & 1 & & & 13 \\
-1 & & & & 0 \\ \hline
 & & & 1 & 2 \\
 & & -1 & & 123 \\ \hline
\end{array}
= b
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
I & & 0 \\ \hline
 & I & 123 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon_{32} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & 1 & & & & \\
13 & & & 1 & & & & & \\
21 & & -1 & & & & & & \\
0 & -1 & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & 1 \\
2 & & & & & & & 1 & \\
3 & & & & & & -1 & & \\
123 & & & & & -1 & & & \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & 1 & & & 13 \\
-1 & & & & 0 \\ \hline
 & & & 1 & 2 \\
 & & -1 & & 123 \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
I & & 0 \\ \hline
 & I & 123 \\ \hline
\end{array}
$$

$$\varepsilon_{123} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & &&& & -1&&& \\
13 & &&& & &-1&& \\
21 & &&& & &&-1& \\
0 & &&& & &&&-1 \\ \hline
1 & 1&&& & &&& \\
2 & &1&& & &&& \\
3 & &&1& & &&& \\
123 & &&&1 & &&& \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline
13 & & & -1 & \\
0 & & & & -1 \\ \hline
2 & 1 & & & \\
123 & & 1 & & \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{c|c|c|}
 & 0 & 123 \\ \hline
0 & & -\mathbb{1} \\ \hline
123 & \mathbb{1} & \\ \hline
\end{array}$$

2. Алгебра $\mathbb{C}_4$

$$\varepsilon_0 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & 1&&& & &&& & &&& & &&& \\
13 & &1&& & &&& & &&& & &&& \\
21 & &&1& & &&& & &&& & &&& \\
0 & &&&1 & &&& & &&& & &&& \\ \hline
42 & &&& & 1&&& & &&& & &&& \\
14 & &&& & &1&& & &&& & &&& \\
1324 & &&& & &&1& & &&& & &&& \\
34 & &&& & &&&1 & &&& & &&& \\ \hline
1 & &&& & &&& & 1&&& & &&& \\
2 & &&& & &&& & &1&& & &&& \\
3 & &&& & &&& & &&1& & &&& \\
123 & &&& & &&& & &&&1 & &&& \\ \hline
134 & &&& & &&& & &&& & 1&&& \\
234 & &&& & &&& & &&& & &1&& \\
4 & &&& & &&& & &&& & &&1& \\
124 & &&& & &&& & &&& & &&&1 \\ \hline
\end{array}$$

$$= \mathit{1} \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 & 1&&& & &&& \\
0 & &1&& & &&& \\
14 & &&1& & &&& \\
34 & &&&1 & &&& \\ \hline
2 & &&& & 1&&& \\
123 & &&& & &1&& \\
234 & &&& & &&1& \\
124 & &&& & &&&1 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & \mathbb{1} & & & \\
34 & & \mathbb{1} & & \\ \hline
123 & & & \mathbb{1} & \\
124 & & & & \mathbb{1} \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_1 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &&& & &&& & &&&-1 & &&& \\
13 & &&& & &&& & &&-1& & &&& \\
21 & &&& & &&& & &1&& & &&& \\
0 & &&& & &&& & 1&&& & &&& \\ \hline
42 & &&& & &&& & &&& & &&&-1 \\
14 & &&& & &&& & &&& & &&-1& \\
1324 & &&& & &&& & &&& & &1&& \\
34 & &&& & &&& & &&& & 1&&& \\ \hline
1 & &&&1 & &&& & &&& & &&& \\
2 & &&1& & &&& & &&& & &&& \\
3 & &-1&& & &&& & &&& & &&& \\
123 & -1&&& & &&& & &&& & &&& \\ \hline
134 & &&& & &&&1 & &&& & &&& \\
234 & &&& & &&1& & &&& & &&& \\
4 & &&& & &-1&& & &&& & &&& \\
124 & &&& & -1&&& & &&& & &&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 & &&& & &-1&& \\
0 & &&& & 1&&& \\
14 & &&& & &&&-1 \\
34 & &&& & &&1& \\ \hline
2 & &1&& & &&& \\
123 & -1&&& & &&& \\
234 & &&&1 & &&& \\
124 & &&-1& & &&& \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & & & -I & \\
34 & & & & -I \\ \hline
123 & I & & & \\
124 & & I & & \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_2 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &&& & &&& & &&1& & &&& \\
13 & &&& & &&& & &&&-1 & &&& \\
21 & &&& & &&& & -1&&& & &&& \\
0 & &&& & &&& & &1&& & &&& \\ \hline
42 & &&& & &&& & &&& & &&1& \\
14 & &&& & &&& & &&& & &&&-1 \\
1324 & &&& & &&& & &&& & -1&&& \\
34 & &&& & &&& & &&& & &1&& \\ \hline
1 & &&-1& & &&& & &&& & &&& \\
2 & &&&1 & &&& & &&& & &&& \\
3 & 1&&& & &&& & &&& & &&& \\
123 & &-1&& & &&& & &&& & &&& \\ \hline
134 & &&& & &&-1& & &&& & &&& \\
234 & &&& & &&&1 & &&& & &&& \\
4 & &&& & 1&&& & &&& & &&& \\
124 & &&& & &-1&& & &&& & &&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= b \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 & &&& & &-1&& \\
0 & &&& & 1&&& \\
14 & &&& & &&&-1 \\
34 & &&& & &&1& \\ \hline
2 & &1&& & &&& \\
123 & -1&&& & &&& \\
234 & &&&1 & &&& \\
124 & &&-1& & &&& \\ \hline
\end{array}
= b \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & & & -I & \\
34 & & & & -I \\ \hline
123 & I & & & \\
124 & & I & & \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_3 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &&& & &&& & &-1&& & &&& \\
13 & &&& & &&& & 1&&& & &&& \\
21 & &&& & &&& & &&&-1 & &&& \\
0 & &&& & &&& & &&1& & &&& \\ \hline
42 & &&& & &&& & &&& & &1&& \\
14 & &&& & &&& & &&& & -1&&& \\
1324 & &&& & &&& & &&& & &&&1 \\
34 & &&& & &&& & &&& & &&-1& \\ \hline
1 & &1&& & &&& & &&& & &&& \\
2 & -1&&& & &&& & &&& & &&& \\
3 & &&&1 & &&& & &&& & &&& \\
123 & &&-1& & &&& & &&& & &&& \\ \hline
134 & &&& & &-1&& & &&& & &&& \\
234 & &&& & 1&&& & &&& & &&& \\
4 & &&& & &&&-1 & &&& & &&& \\
124 & &&& & &&1& & &&& & &&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 & &&& & -1&&& \\
0 & &&& & &-1&& \\
14 & &&& & &&1& \\
34 & &&& & &&&1 \\ \hline
2 & 1&&& & &&& \\
123 & &1&& & &&& \\
234 & &&-1& & &&& \\
124 & &&&-1 & &&& \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & & & -\mathbb{1} & \\
34 & & & & \mathbb{1} \\ \hline
123 & \mathbb{1} & & & \\
124 & & -\mathbb{1} & & \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_4 \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
13 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
21 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
0 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\ \hline
42 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
14 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
1324 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
34 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
2 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
3 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
123 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\ \hline
134 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
234 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
4 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
124 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & & & & 1 & & 13 \\
 & & & & & & & 1 & 0 \\
 & & & & -1 & & & & 14 \\
 & & & & & -1 & & & 34 \\ \hline
 & & -1 & & & & & & 2 \\
 & & & -1 & & & & & 123 \\
1 & & & & & & & & 234 \\
 & 1 & & & & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & & & \mathbb{1} & 0 \\
 & & -\mathbb{1} & & 34 \\ \hline
 & -\mathbb{1} & & & 123 \\
\mathbb{1} & & & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{13} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
13 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
21 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
14 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
1324 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
34 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\
2 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
3 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
123 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
234 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
4 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
124 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= b \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & 1 & & & & & & & 13 \\
-1 & & & & & & & & 0 \\
 & & & -1 & & & & & 14 \\
 & & 1 & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & 1 & & & 2 \\
 & & & & -1 & & & & 123 \\
 & & & & & & & -1 & 234 \\
 & & & & & & 1 & & 124 \\ \hline
\end{array}
= b \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
I & & & & 0 \\
 & -I & & & 34 \\ \hline
 & & I & & 123 \\
 & & & -I & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{21} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
13 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
0 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
14 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
34 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
2 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
123 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
234 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
124 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
1 & & & & & & & & 13 \\
 & 1 & & & & & & & 0 \\
 & & 1 & & & & & & 14 \\
 & & & 1 & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & 1 & & & & 2 \\
 & & & & & 1 & & & 123 \\
 & & & & & & 1 & & 234 \\
 & & & & & & & 1 & 124 \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
\mathbb{1} & & & & 0 \\
 & \mathbb{1} & & & 34 \\ \hline
 & & \mathbb{1} & & 123 \\
 & & & \mathbb{1} & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{32} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
13 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
14 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
34 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
2 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
123 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
234 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
124 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & 1 & & & & & & & 13 \\
-1 & & & & & & & & 0 \\
 & & & -1 & & & & & 14 \\
 & & 1 & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & 1 & & & 2 \\
 & & & & -1 & & & & 123 \\
 & & & & & & & -1 & 234 \\
 & & & & & & 1 & & 124 \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
I & & & & 0 \\
 & -I & & & 34 \\ \hline
 & & I & & 123 \\
 & & & -I & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{14} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&1& &&&& &&&& \\
13 &&&& &&&&-1 &&&& &&&& \\
21 &&&& &-1&&& &&&& &&&& \\
0 &&&& &&1&& &&&& &&&& \\ \hline
42 &&&-1& &&&& &&&& &&&& \\
14 &&&&1 &&&& &&&& &&&& \\
1324 &1&&& &&&& &&&& &&&& \\
34 &&-1&& &&&& &&&& &&&& \\ \hline
1 &&&& &&&& &&&& &&&1& \\
2 &&&& &&&& &&&& &&&&-1 \\
3 &&&& &&&& &&&& &-1&&& \\
123 &&&& &&&& &&&& &&1&& \\ \hline
134 &&&& &&&& &&&-1& &&&& \\
234 &&&& &&&& &&&&1 &&&& \\
4 &&&& &&&& &1&&& &&&& \\
124 &&&& &&&& &&-1&& &&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= b \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & -1 & & & & & 13 \\
 & & 1 & & & & & & 0 \\
 & 1 & & & & & & & 14 \\
-1 & & & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & & & -1 & 2 \\
 & & & & & & 1 & & 123 \\
 & & & & & 1 & & & 234 \\
 & & & & -1 & & & & 124 \\ \hline
\end{array} = b \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & -I & & & 0 \\
I & & & & 34 \\ \hline
 & & & -I & 123 \\
 & & I & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{34} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &1&&& &&&& &&&& \\
13 &&&& &&1&& &&&& &&&& \\
21 &&&& &&&1& &&&& &&&& \\
0 &&&& &&&&1 &&&& &&&& \\ \hline
42 &1&&& &&&& &&&& &&&& \\
14 &&1&& &&&& &&&& &&&& \\
1324 &&&1& &&&& &&&& &&&& \\
34 &&&&1 &&&& &&&& &&&& \\ \hline
1 &&&& &&&& &&&& &1&&& \\
2 &&&& &&&& &&&& &&1&& \\
3 &&&& &&&& &&&& &&&1& \\
123 &&&& &&&& &&&& &&&&1 \\ \hline
134 &&&& &&&& &1&&& &&&& \\
234 &&&& &&&& &&1&& &&&& \\
4 &&&& &&&& &&&1& &&&& \\
124 &&&& &&&& &&&&1 &&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= \mathit{1} \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & 1 & & & & & & 13 \\
 & & & 1 & & & & & 0 \\
1 & & & & & & & & 14 \\
 & 1 & & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & & 1 & & 2 \\
 & & & & & & & 1 & 123 \\
 & & & & 1 & & & & 234 \\
 & & & & & 1 & & & 124 \\ \hline
\end{array} = \mathit{1} \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & \mathbb{1} & & & 0 \\
\mathbb{1} & & & & 34 \\ \hline
 & & & \mathbb{1} & 123 \\
 & & \mathbb{1} & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{42} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&&-1 &&&& &&&& \\
13 &&&& &&&-1& &&&& &&&& \\
21 &&&& &&1&& &&&& &&&& \\
0 &&&& &1&&& &&&& &&&& \\ \hline
42 &&&&1 &&&& &&&& &&&& \\
14 &&&1& &&&& &&&& &&&& \\
1324 &&-1&& &&&& &&&& &&&& \\
34 &-1&&& &&&& &&&& &&&& \\ \hline
1 &&&& &&&& &&&& &&&&-1 \\
2 &&&& &&&& &&&& &&&-1& \\
3 &&&& &&&& &&&& &&1&& \\
123 &&&& &&&& &&&& &1&&& \\ \hline
134 &&&& &&&& &&&&1 &&&& \\
234 &&&& &&&& &&&1& &&&& \\
4 &&&& &&&& &&-1&& &&&& \\
124 &&&& &&&& &-1&&& &&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & -1 & & & & & 13 \\
 & & 1 & & & & & & 0 \\
 & 1 & & & & & & & 14 \\
-1 & & & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & & & -1 & 2 \\
 & & & & & & 1 & & 123 \\
 & & & & & 1 & & & 234 \\
 & & & & -1 & & & & 124 \\ \hline
\end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & -I & & & 0 \\
I & & & & 34 \\ \hline
 & & & -I & 123 \\
 & & I & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{123} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& &-1&&& &&&& \\
13 &&&& &&&& &&-1&& &&&& \\
21 &&&& &&&& &&&-1& &&&& \\
0 &&&& &&&& &&&&-1 &&&& \\ \hline
42 &&&& &&&& &&&& &1&&& \\
14 &&&& &&&& &&&& &&1&& \\
1324 &&&& &&&& &&&& &&&1& \\
34 &&&& &&&& &&&& &&&&1 \\ \hline
1 &1&&& &&&& &&&& &&&& \\
2 &&1&& &&&& &&&& &&&& \\
3 &&&1& &&&& &&&& &&&& \\
123 &&&&1 &&&& &&&& &&&& \\ \hline
134 &&&& &-1&&& &&&& &&&& \\
234 &&&& &&-1&& &&&& &&&& \\
4 &&&& &&&-1& &&&& &&&& \\
124 &&&& &&&&-1 &&&& &&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= \mathit{1} \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & & -1 & & & & 13 \\
 & & & & & -1 & & & 0 \\
 & & & & & & 1 & & 14 \\
 & & & & & & & 1 & 34 \\ \hline
1 & & & & & & & & 2 \\
 & 1 & & & & & & & 123 \\
 & & -1 & & & & & & 234 \\
 & & & -1 & & & & & 124 \\ \hline
\end{array} = \mathit{1} \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & & -\mathbb{1} & & 0 \\
 & & & \mathbb{1} & 34 \\ \hline
\mathbb{1} & & & & 123 \\
 & -\mathbb{1} & & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{124} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&&&& 1 &&& \\
13 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
21 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
0 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
42 &&&&&&&&& -1 &&&&&&& \\
14 &&&&&&&&&& -1 &&&&&& \\
1324 &&&&&&&&&&& -1 &&&&& \\
34 &&&&&&&&&&&& -1 &&&& \\ \hline
1 &&&&& -1 &&&&&&&&&&& \\
2 &&&&&& -1 &&&&&&&&&& \\
3 &&&&&&& -1 &&&&&&&&& \\
123 &&&&&&&& -1 &&&&&&&& \\ \hline
134 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
234 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\
4 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\
124 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= 1 \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&&&&& 1 & \\
0 &&&&&&&& 1 \\
14 &&&&& -1 &&& \\
34 &&&&&& -1 && \\ \hline
2 &&& -1 &&&&& \\
123 &&&& -1 &&&& \\
234 & 1 &&&&&&& \\
124 && 1 &&&&&& \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&&& \mathbb{1} \\
34 &&& -\mathbb{1} & \\ \hline
123 && -\mathbb{1} && \\
124 & \mathbb{1} &&& \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{234} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
13 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
21 &&&&&&&&&&&&& -1 &&& \\
0 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\ \hline
42 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
14 &&&&&&&&&&&& -1 &&&& \\
1324 &&&&&&&&& -1 &&&&&&& \\
34 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&& -1 &&&&&&&&& \\
2 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
3 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\
123 &&&&&& -1 &&&&&&&&&& \\ \hline
134 &&& -1 &&&&&&&&&&&&& \\
234 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
4 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
124 && -1 &&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= b \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&&&&&& -1 \\
0 &&&&&&& 1 & \\
14 &&&&&& -1 && \\
34 &&&&& 1 &&& \\ \hline
2 &&&& 1 &&&& \\
123 &&& -1 &&&&& \\
234 && 1 &&&&&& \\
124 & -1 &&&&&&& \\ \hline
\end{array} = b \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&&& -I \\
34 &&& -I & \\ \hline
123 && I && \\
124 & I &&& \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{134} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
13 &&&&&&&&&&&&&&& -1 & \\
21 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
0 &&&&&&&&&&&&& 1 &&& \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&& -1 &&&& \\
14 &&&&&&&&&&& -1 &&&&& \\
1324 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\
34 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
2 &&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\
3 &&&&&& -1 &&&&&&&&&& \\
123 &&&&& -1 &&&&&&&&&&& \\ \hline
134 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
234 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\
4 && -1 &&&&&&&&&&&&&& \\
124 & -1 &&&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&&&&&& -1 \\
0 &&&&&&& 1 & \\
14 &&&&&& -1 && \\
34 &&&&& 1 &&& \\ \hline
2 &&&& 1 &&&& \\
123 &&& -1 &&&&& \\
234 && 1 &&&&&& \\
124 & -1 &&&&&&& \\ \hline
\end{array} = a \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&&& -I \\
34 &&& -I & \\ \hline
123 && I && \\
124 & I &&& \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{1324} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\
13 &&&&& -1 &&&&&&&&&&& \\
21 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
0 &&&&&&& -1 &&&&&&&&& \\ \hline
42 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\
14 & -1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
1324 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
34 &&& -1 &&&&&&&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
2 &&&&&&&&&&&&& -1 &&& \\
3 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
123 &&&&&&&&&&&&&&& -1 & \\ \hline
134 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\
234 &&&&&&&&& -1 &&&&&&& \\
4 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\
124 &&&&&&&&&&& -1 &&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&& 1 &&&&& \\
0 &&&& 1 &&&& \\
14 & 1 &&&&&&& \\
34 && 1 &&&&&& \\ \hline
2 &&&&&&& 1 & \\
123 &&&&&&&& 1 \\
234 &&&&& 1 &&& \\
124 &&&&&& 1 && \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 && \mathbb{1} && \\
34 & \mathbb{1} &&& \\ \hline
123 &&&& \mathbb{1} \\
124 &&& \mathbb{1} & \\ \hline
\end{array}$$

Мы получили структурные матрицы алгебры Клиффорда $\mathbb{C}$ по такому же алгоритму, по которому в Лекции 3 были выведены матрицы Дирака. Но эти матрицы существенно отличаются от матриц Дирака. В дальнейшем мы дадим физическое толкование полученным матрицам. Пока лишь заметим, что с проекциями вектора действия на направления базисных векторов ε_I связан ряд свойств элементарных частиц, и обратим внимание только на матрицу, представляющую базисный вектор ε_{21}. В комплексном представлении эта матрица имеет вид

$$C^{L}{}_{K(21)} = i \cdot \delta^{L}{}_{K} \,.$$

Необходимость в получении такой матрицы была всегда. Дело в том, что в теории Дирака матрица такого вида вводится волевым путем (то есть без обоснования) для описания поведения электрона в электромагнитном поле. В этой Лекции мы используем матрицу $C^{L}{}_{K(21)}$ для получения квантовых постулатов в теории Шредингера.

III. СЖАТОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОНТРАВАРИАНТНОЙ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА

В этом разделе рассмотрим сжатое представление базисных векторов алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_n$ в ее подалгебре $\mathbb{C}_{n-k}$, где $k < n$. Для примера рассмотрим сжатое представление базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_n$ в ее подалгебре $\mathbb{C}_{n-1}$. Разобьем базисные векторы ε_I алгебры $\mathbb{C}_n$ на две группы ε_{I_1} и ε_{I_2} с одинаковым числом векторов так, чтобы векторы ε_{I_1} образовывали алгебру $\mathbb{C}_{n-1}$. В силу симметрий алгебры Клиффорда соотношения (1) имеют вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{K_1} \circ \varepsilon_{I_1} &= \varepsilon_{L_1} \cdot C^{L_1}{}_{K_1 I_1} \,, && (9)\\
\varepsilon_{K_1} \circ \varepsilon_{I_2} &= \varepsilon_{L_2} \cdot C^{L_2}{}_{K_1 I_2} \,, && (10)\\
\varepsilon_{K_2} \circ \varepsilon_{I_1} &= \varepsilon_{L_2} \cdot C^{L_2}{}_{K_2 I_1} \,, &&\\
\varepsilon_{K_2} \circ \varepsilon_{I_2} &= \varepsilon_{L_1} \cdot C^{L_1}{}_{K_2 I_2} \,. &&
\end{aligned}$$

Будем полагать, что приближенно при вычислении матриц представления базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_n$ в алгебре $\mathbb{C}_{n-1}$ базисные векторы ε_{L_2} в правой части уравнения (10) можно заменить на базисные векторы ε_{L_1} с помощью соотношения

$$\varepsilon_{L_2} = \varepsilon_{L_1} \cdot P^{L_1}{}_{L_2} \,, \tag{11}$$

где $P^{L_1}{}_{L_2}$ есть матрица соответствий. Тогда соотношение (10) принимает вид:

$$\varepsilon_{K_1} \circ \varepsilon_{I_2} = \varepsilon_{L_1} \cdot P^{L_1}{}_{L_2} \cdot C^{L_2}{}_{K_1 I_2} \,. \tag{12}$$

Соотношения (9) и (12) позволяют получить матрицы представления базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_n$ в ее подалгебре $\mathbb{C}_{n-1}$, причем базисные векторы подалгебры $\mathbb{C}_{n-1}$ представляются точно, а остальные базисные векторы – приближенно.

Аналогичным образом можно рассмотреть сжатое представление базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_n$ в ее подалгебре $\mathbb{C}_{n-k}$, где $k < n$.

1. Первое сжатое представление.

Рассмотрим первое сжатое представление

$$R_1 : \mathbb{C}_4 \to \mathbb{C}_3 \, \{\varepsilon_{32}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_{123}\}.$$

Для этого положим, что при вычислении структурных матриц по формуле (12) соотношение (11) определяется тем, что базисные векторы с индексами

$$42, 14, 1324, 34, 134, 234, 4, 124$$

заменяются на базисные векторы с индексами

$$32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123$$

соответственно. Тогда размерность матриц базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_4$ понижается вдвое и равна 8×8 в действительном представлении, 4×4 в комплексном представлении и $2{\times}2$ в кватернионном представлении.

В результате получим следующие структурные матрицы, соответствующие первому сжатому представлению базисных векторов алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_4$ в алгебре $\mathbb{C}_3$

$$\varepsilon_0 \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\
\hline
\mathit{42} & 32 & 1 & & & & & & & \\
\mathit{14} & 13 & & 1 & & & & & & \\
\mathit{1324} & 21 & & & 1 & & & & & \\
\mathit{34} & 0 & & & & 1 & & & & \\
\hline
\mathit{134} & 1 & & & & & 1 & & & \\
\mathit{234} & 2 & & & & & & 1 & & \\
\mathit{4} & 3 & & & & & & & 1 & \\
\mathit{124} & 123 & & & & & & & & 1\\
\hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\
\hline
1 & & & & 13\\
 & 1 & & & 0\\
\hline
 & & 1 & & 2\\
 & & & 1 & 123\\
\hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\
\hline
\mathbb{1} & & 0\\
\hline
 & \mathbb{1} & 123\\
\hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_1 \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\
\hline
\mathit{42} & 32 & & & & & & & & -1\\
\mathit{14} & 13 & & & & & & & -1 & \\
\mathit{1324} & 21 & & & & & & 1 & & \\
\mathit{34} & 0 & & & & & 1 & & & \\
\hline
\mathit{134} & 1 & & & & 1 & & & & \\
\mathit{234} & 2 & & & 1 & & & & & \\
\mathit{4} & 3 & & -1 & & & & & & \\
\mathit{124} & 123 & -1 & & & & & & & \\
\hline
\end{array}
= a \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\
\hline
 & & & -1 & 13\\
 & & 1 & & 0\\
\hline
 & 1 & & & 2\\
-1 & & & & 123\\
\hline
\end{array}
= a \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\
\hline
 & -I & 0\\
\hline
I & & 123\\
\hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_2 \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\
\hline
\mathit{42} & 32 & & & & & & & 1 & \\
\mathit{14} & 13 & & & & & & & & -1\\
\mathit{1324} & 21 & & & & & -1 & & & \\
\mathit{34} & 0 & & & & & & 1 & & \\
\hline
\mathit{134} & 1 & & & -1 & & & & & \\
\mathit{234} & 2 & & & & 1 & & & & \\
\mathit{4} & 3 & 1 & & & & & & & \\
\mathit{124} & 123 & & -1 & & & & & & \\
\hline
\end{array}
= b \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\
\hline
 & & & -i & 13\\
 & & i & & 0\\
\hline
 & i & & & 2\\
-i & & & & 123\\
\hline
\end{array}
= b \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\
\hline
 & -I & 0\\
\hline
I & & 123\\
\hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_3 \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\
\hline
\mathit{42} & 32 & & & & & & -1 & & \\
\mathit{14} & 13 & & & & & 1 & & & \\
\mathit{1324} & 21 & & & & & & & & -1\\
\mathit{34} & 0 & & & & & & & 1 & \\
\hline
\mathit{134} & 1 & & 1 & & & & & & \\
\mathit{234} & 2 & -1 & & & & & & & \\
\mathit{4} & 3 & & & & 1 & & & & \\
\mathit{124} & 123 & & & -1 & & & & & \\
\hline
\end{array}
= i \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\
\hline
 & & -1 & & 13\\
 & & & -1 & 0\\
\hline
1 & & & & 2\\
 & 1 & & & 123\\
\hline
\end{array}
= i \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\
\hline
 & -I & 0\\
\hline
I & & 123\\
\hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_4 \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & & & & & & -1 & & \\
\mathit{14} & 13 & & & & & 1 & & & \\
\mathit{1324} & 21 & & & & & & & & -1 \\
\mathit{34} & 0 & & & & & & & 1 & \\ \hline
\mathit{134} & 1 & & 1 & & & & & & \\
\mathit{234} & 2 & -1 & & & & & & & \\
\mathit{4} & 3 & & & & 1 & & & & \\
\mathit{124} & 123 & & & -1 & & & & & \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & -1 & & 13 \\
 & & & -1 & 0 \\ \hline
1 & & & & 2 \\
 & 1 & & & 123 \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & -\mathbb{1} & 0 \\ \hline
\mathbb{1} & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{21} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & & 1 & & & & & & \\
\mathit{14} & 13 & -1 & & & & & & & \\
\mathit{1324} & 21 & & & & 1 & & & & \\
\mathit{34} & 0 & & & -1 & & & & & \\ \hline
\mathit{134} & 1 & & & & & & 1 & & \\
\mathit{234} & 2 & & & & & -1 & & & \\
\mathit{4} & 3 & & & & & & & & 1 \\
\mathit{124} & 123 & & & & & & & -1 & \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
1 & & & & 13 \\
 & 1 & & & 0 \\ \hline
 & & 1 & & 2 \\
 & & & 1 & 123 \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
\mathbb{1} & & 0 \\ \hline
 & \mathbb{1} & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{13} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & & & -1 & & & & & \\
\mathit{14} & 13 & & & & 1 & & & & \\
\mathit{1324} & 21 & 1 & & & & & & & \\
\mathit{34} & 0 & & -1 & & & & & & \\ \hline
\mathit{134} & 1 & & & & & & & -1 & \\
\mathit{234} & 2 & & & & & & & & 1 \\
\mathit{4} & 3 & & & & & 1 & & & \\
\mathit{124} & 123 & & & & & & -1 & & \\ \hline
\end{array}
= b \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & i & & & 13 \\
-i & & & & 0 \\ \hline
 & & & i & 2 \\
 & & -i & & 123 \\ \hline
\end{array}
= b \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
I & & 0 \\ \hline
 & I & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{32} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & & & & 1 & & & & \\
\mathit{14} & 13 & & & 1 & & & & & \\
\mathit{1324} & 21 & & -1 & & & & & & \\
\mathit{34} & 0 & -1 & & & & & & & \\ \hline
\mathit{134} & 1 & & & & & & & & 1 \\
\mathit{234} & 2 & & & & & & & 1 & \\
\mathit{4} & 3 & & & & & & -1 & & \\
\mathit{124} & 123 & & & & & -1 & & & \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & 1 & & & 13 \\
-1 & & & & 0 \\ \hline
 & & & 1 & 2 \\
 & & -1 & & 123 \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
I & & 0 \\ \hline
 & I & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{14} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & & & -1 & & & & & \\
\mathit{14} & 13 & & & & 1 & & & & \\
\mathit{1324} & 21 & 1 & & & & & & & \\
\mathit{34} & 0 & & -1 & & & & & & \\ \hline
\mathit{134} & 1 & & & & & & & -1 & \\
\mathit{234} & 2 & & & & & & & & 1 \\
\mathit{4} & 3 & & & & & 1 & & & \\
\mathit{124} & 123 & & & & & & -1 & & \\ \hline
\end{array}
= b \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & 1 & & & 13 \\
-1 & & & & 0 \\ \hline
 & & & 1 & 2 \\
 & & -1 & & 123 \\ \hline
\end{array}
= b \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
I & & 0 \\ \hline
 & I & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{42} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & & & & 1 & & & & \\
\mathit{14} & 13 & & & 1 & & & & & \\
\mathit{1324} & 21 & & -1 & & & & & & \\
\mathit{34} & 0 & -1 & & & & & & & \\ \hline
\mathit{134} & 1 & & & & & & & & 1 \\
\mathit{234} & 2 & & & & & & & 1 & \\
\mathit{4} & 3 & & & & & & -1 & & \\
\mathit{124} & 123 & & & & & -1 & & & \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & i & & & 13 \\
-i & & & & 0 \\ \hline
 & & & i & 2 \\
 & & -i & & 123 \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
I & & 0 \\ \hline
 & I & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{34} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & 1 & & & & & & & \\
\mathit{14} & 13 & & 1 & & & & & & \\
\mathit{1324} & 21 & & & 1 & & & & & \\
\mathit{34} & 0 & & & & 1 & & & & \\ \hline
\mathit{134} & 1 & & & & & 1 & & & \\
\mathit{234} & 2 & & & & & & 1 & & \\
\mathit{4} & 3 & & & & & & & 1 & \\
\mathit{124} & 123 & & & & & & & & 1 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
1 & & & & 13 \\
 & 1 & & & 0 \\ \hline
 & & 1 & & 2 \\
 & & & 1 & 123 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
\mathbb{1} & & 0 \\ \hline
 & \mathbb{1} & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{123} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & & & & & -1 & & & \\
\mathit{14} & 13 & & & & & & -1 & & \\
\mathit{1324} & 21 & & & & & & & -1 & \\
\mathit{34} & 0 & & & & & & & & -1 \\ \hline
\mathit{134} & 1 & 1 & & & & & & & \\
\mathit{234} & 2 & & 1 & & & & & & \\
\mathit{4} & 3 & & & 1 & & & & & \\
\mathit{124} & 123 & & & & 1 & & & & \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & -1 & & 13 \\
 & & & -1 & 0 \\ \hline
1 & & & & 2 \\
 & 1 & & & 123 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & -\mathbb{1} & 0 \\ \hline
\mathbb{1} & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{124} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & & & & & -1 & & & \\
\mathit{14} & 13 & & & & & & -1 & & \\
\mathit{1324} & 21 & & & & & & & -1 & \\
\mathit{34} & 0 & & & & & & & & -1 \\ \hline
\mathit{134} & 1 & 1 & & & & & & & \\
\mathit{234} & 2 & & 1 & & & & & & \\
\mathit{4} & 3 & & & 1 & & & & & \\
\mathit{124} & 123 & & & & 1 & & & & \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & -1 & & 13 \\
 & & & -1 & 0 \\ \hline
1 & & & & 2 \\
 & 1 & & & 123 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & -\mathbb{1} & 0 \\ \hline
\mathbb{1} & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{134} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & & & & & & & & -1 \\
\mathit{14} & 13 & & & & & & & -1 & \\
\mathit{1324} & 21 & & & & & & 1 & & \\
\mathit{34} & 0 & & & & & 1 & & & \\ \hline
\mathit{134} & 1 & & & & 1 & & & & \\
\mathit{234} & 2 & & & 1 & & & & & \\
\mathit{4} & 3 & & -1 & & & & & & \\
\mathit{124} & 123 & -1 & & & & & & & \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & & -i & 13 \\
 & & i & & 0 \\ \hline
 & i & & & 2 \\
-i & & & & 123 \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & -I & 0 \\ \hline
I & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{234} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & & & & & & & 1 & \\
\mathit{14} & 13 & & & & & & & & -1 \\
\mathit{1324} & 21 & & & & & -1 & & & \\
\mathit{34} & 0 & & & & & & 1 & & \\ \hline
\mathit{134} & 1 & & & -1 & & & & & \\
\mathit{234} & 2 & & & & 1 & & & & \\
\mathit{4} & 3 & 1 & & & & & & & \\
\mathit{124} & 123 & & -1 & & & & & & \\ \hline
\end{array}
= b \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & & -1 & 13 \\
 & & 1 & & 0 \\ \hline
 & 1 & & & 2 \\
-1 & & & & 123 \\ \hline
\end{array}
= b \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & -I & 0 \\ \hline
I & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{1324} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & & 1 & & & & & & \\
\mathit{14} & 13 & -1 & & & & & & & \\
\mathit{1324} & 21 & & & & 1 & & & & \\
\mathit{34} & 0 & & & -1 & & & & & \\ \hline
\mathit{134} & 1 & & & & & & 1 & & \\
\mathit{234} & 2 & & & & & -1 & & & \\
\mathit{4} & 3 & & & & & & & & 1 \\
\mathit{124} & 123 & & & & & & & -1 & \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
1 & & & & 13 \\
 & 1 & & & 0 \\ \hline
 & & 1 & & 2 \\
 & & & 1 & 123 \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
\mathbb{1} & & 0 \\ \hline
 & \mathbb{1} & 123 \\ \hline
\end{array}$$

Сделаем замечание, которое в Лекции 9 будет использовано при построении уравнения, обобщающего уравнение Дирака. В первом сжатом представлении восемь структурных матриц алгебры $\mathbb{C}$, соответствующих базисным векторам

$$\varepsilon_{34},\quad \varepsilon_{134},\quad \varepsilon_{234},\quad \varepsilon_{4},\quad \varepsilon_{1324},\quad \varepsilon_{14},\quad \varepsilon_{42},\quad \varepsilon_{124}\,,$$

отождествляются с матрицами, соответствующими базисным векторам

$$\varepsilon_{0},\quad \varepsilon_{1},\quad \varepsilon_{2},\quad \varepsilon_{3},\quad \varepsilon_{21},\quad \varepsilon_{13},\quad \varepsilon_{32},\quad \varepsilon_{123}\,.$$

Представление первых восьми матриц является неточным вплоть до того, что сигнатура базисных векторов

$$\varepsilon_4, \quad \varepsilon_{14}, \quad \varepsilon_{42}, \quad \varepsilon_{124}\,,$$

меняет знак. Для нас в дальнейшем окажется особенно важным то, что в первом сжатом представлении матрица $C^L{}_{K34}$ отождествляется с матрицей $C^L{}_{K0} = \delta^L{}_K$.

2. Второе сжатое представление.

Рассмотрим второе сжатое представление

$$R_2 : \mathbb{C}_4 \to \mathbb{C}_2\,\{\varepsilon_{32}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_0\}.$$

Для этого положим, что при вычислении структурных матриц по формуле (12) соотношение (11) определяется тем, что базисные векторы с индексами $(42, 14, 1324, 34)$, $(134, 234, 4, 124)$ и $(1, 2, 3, 123)$ заменяются на базисные векторы с индексами $(32, 13, 21, 0)$ соответственно. Тогда размерность матриц представления базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_4$ понижается вдвое в сравнении с первым сжатым представлением и равна 4×4 в действительном представлении, 2×2 в комплексном представлении и 1×1 в кватернионном представлении.

Ограничимся тем, что приведем матрицы регулярного представления образующих базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_4$ в алгебре $\mathbb{C}_2$. Имеем

$$\varepsilon_1 \sim \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}32&13&21&0\end{array}\\ \begin{array}{cc}1&32\\2&13\\3&21\\123&0\end{array} & \left[\begin{array}{cc|cc} &&&1\\ &&1&\\ \hline &-1&&\\ -1&&& \end{array}\right]\end{array} = a \left[\begin{array}{c|c} &1\\ \hline -1& \end{array}\right] = a\,I$$

$$\varepsilon_2 \sim \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}32&13&21&0\end{array}\\ \begin{array}{cc}1&32\\2&13\\3&21\\123&0\end{array} & \left[\begin{array}{cc|cc} &&-1&\\ &&&1\\ \hline 1&&&\\ &-1&& \end{array}\right]\end{array} = b \left[\begin{array}{c|c} &1\\ \hline -1& \end{array}\right] = b\,I$$

$$\varepsilon_3 \sim \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}32&13&21&0\end{array}\\ \begin{array}{cc}1&32\\2&13\\3&21\\123&0\end{array} & \left[\begin{array}{cc|cc} &1&&\\ -1&&&\\ \hline &&&1\\ &&-1& \end{array}\right]\end{array} = i \left[\begin{array}{c|c} 1&\\ \hline &1 \end{array}\right] = i\,\mathbb{1}$$

$$\varepsilon_4 \sim \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}32&13&21&0\end{array}\\ \begin{array}{cc}134&32\\234&13\\4&21\\124&0\end{array} & \left[\begin{array}{cc|cc} &1&&\\ -1&&&\\ \hline &&&1\\ &&-1& \end{array}\right]\end{array} = i \left[\begin{array}{c|c} 1&\\ \hline &1 \end{array}\right] = i\,\mathbb{1}$$

В результате для базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_4$ получим

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_{32} \sim a\,I\,, & \varepsilon_{42} \sim a\,I\,,\\ \varepsilon_{13} \sim b\,I\,, & \varepsilon_{14} \sim b\,I\,,\\ \varepsilon_{21} \sim i\,\mathbb{1}\,, & \varepsilon_{1324} \sim i\,\mathbb{1}\,,\\ \varepsilon_0 \sim 1\,\mathbb{1}\,, & \varepsilon_{34} \sim 1\,\mathbb{1}\,, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_1 \sim a\,I\,, & \varepsilon_{134} \sim a\,I\,,\\ \varepsilon_2 \sim b\,I\,, & \varepsilon_{234} \sim b\,I\,,\\ \varepsilon_3 \sim i\,\mathbb{1}\,, & \varepsilon_4 \sim i\,\mathbb{1}\,,\\ \varepsilon_{123} \sim 1\,\mathbb{1}\,, & \varepsilon_{124} \sim 1\,\mathbb{1}\,. \end{array}$$

В рассматриваемом представлении только базисные векторы ε_{32}, ε_{13}, ε_{21}, ε_0 представлены точно. Соотношения

$$\begin{array}{l} \varepsilon_{32} \sim a\,I\,,\\ \varepsilon_{13} \sim b\,I\,,\\ \varepsilon_{21} \sim i\,\mathbb{1}\,,\\ \varepsilon_0 \sim 1\,\mathbb{1} \end{array}$$

можно рассматривать как соответствие между указанными базисными векторами и кватернионами. Именно такое соответствие было постулировано в разделе IIC.

3. Третье сжатое представление

Рассмотрим третье сжатое представление

$$R_3 : \mathbb{C}_4 \to \mathbb{C}_1\,\{\varepsilon_{21}, \varepsilon_0\}\,.$$

Для этого положим, что соотношение (11) определяется тем, что базисные векторы с индексами $(42, 14)$, $(1324, 34)$, $(134, 234)$, $(4, 124)$, $(1, 2)$, $(3, 123)$, $(32, 13)$ заменяются на векторы с индексами $(21, 0)$ соответственно. Тогда размерность матриц базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_4$ понижается вдвое в сравнении с вторым сжатым представлением и равна 2×2 в действительном представлении, 1×1 в комплексном представлении. В результате для базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_4$ получим

$$\begin{array}{llll} \varepsilon_{32} \sim a\,, & \varepsilon_1 \sim a\,, & \varepsilon_{42} \sim a\,, & \varepsilon_{134} \sim a\,,\\ \varepsilon_{13} \sim b\,, & \varepsilon_2 \sim b\,, & \varepsilon_{14} \sim b\,, & \varepsilon_{234} \sim b\,,\\ \varepsilon_{21} \sim i\,, & \varepsilon_3 \sim i\,, & \varepsilon_{1324} \sim i\,, & \varepsilon_4 \sim i\,,\\ \varepsilon_0 \sim 1\,, & \varepsilon_{123} \sim 1\,, & \varepsilon_{34} \sim 1\,, & \varepsilon_{124} \sim 1 \end{array}$$

В рассматриваемом представлении вектор ε_{21} и только он представляется точно мнимой единицей. Именно такое соответствие было постулировано в разделе IIB.

IV. КОНТРАВАРИАНТНАЯ АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ И КВАНТОВЫЕ ПОСТУЛАТЫ

Мы вычислили структурные матрицы контравариантной алгебры действия и теперь вернемся к уравнениям структуры этой алгебры, которые в Лекции 1 были записаны следующим образом

$$\partial_m \psi^L = \frac{1}{\hbar}\, C^L{}_{IK} \cdot p^K{}_m \cdot \psi^I\,. \tag{13}$$

Наша задача состоит в том, чтобы попытаться привести эти уравнения к задаче на собственные значения, с которой мы имеем дело в квантовой механике

$$\frac{\hbar}{i}\,\frac{\partial \psi}{\partial x^m} = p_m\,\psi\,. \tag{14}$$

Анализируя полученные структурные матрицы, мы выделили матрицу

$$C^L{}_{I(21)}\,.$$

В комплексном представлении эта матрица равна

$$C^L{}_{I(21)} = i\,\delta^L{}_I\,.$$

Таким образом, имеется единственная возможность привести уравнения структуры (13) к квантовым постулатам (14): необходимо в уравнениях (13) положить индекс $K = 21$. Отсюда получаем следующий вывод: квантовые постулаты в теории Шредингера следуют из уравнений структуры контравариантной алгебры действия. При этом контравариантную алгебру действия необходимо рассматривать как алгебру Клиффорда и ключевую роль отвести компоненте вектора действия S^{21}.

В общем плане построение квантовой теории должно сводиться к установлению алгебр, которым подчиняется вектор действия, а также изучению уравнения структуры вида (13). Именно в таком ключе квантовая теория будет рассматриваться в наших Лекциях.

V. ВЫВОДЫ.

- Алгебра Клиффорда $\mathbb{C}$ представлена структурными матрицами, которые составляют новую алгебру матриц, дополнительную к алгебре матриц Дирака.

- В число структурных матриц алгебры Клиффорда $\widetilde{\mathbb{C}}$ входит матрица $i\,\delta^I{}_K$, которая в теории Дирака вводится дополнительно к матрицам Дирака для описания взаимодействия электрона с электромагнитным полем. Поэтому следует считать, что новая алгебра матриц не менее существенна для квантовой механики, чем алгебра матриц Дирака.

- В отличие от алгебры Клиффорда $\widetilde{\mathbb{C}}_4$ алгебра Клиффорда $\mathbb{C}_4$ в первом сжатом представлении представлена двумя алгебрами, изоморфными алгебре $\mathbb{C}_3$. И, в частности, структурная матрица $C^L{}_{K(34)}$ отождествляется с матрицей $C^L{}_{K(0)} = \delta^L{}_K$.

- Из алгебраической структуры векторов действия следуют квантовые постулаты и теория квантовых явлений. Использование матрицы $i\,\delta^I{}_K$ в уравнениях структуры позволяет получить квантовые постулаты Шредингера.