

## Лекция 12. Алгебра нерелятивистских кварков

А. А. Кеца́рис  
(26 февраля 2005 г.)

В этой Лекции мы рассматриваем алгебру кварков как обобщение алгебры Клиффорда. Каждому поколению кварков ставится в соответствие разновидность алгебры кварков, отличающаяся знаком перестановки сомножителей в произведении образующих базисных векторов геометрического пространства.

### I. ВВЕДЕНИЕ

Для описания фундаментальных частиц, отличных от лептонов, в предыдущей Лекции мы предложили обобщить алгебру Клиффорда, отказавшись от антикоммутативности умножения базисных векторов образующего пространства. В качестве простейшего случая была рассмотрена коммутативная алгебра  $\mathbb{C}^*$ . При этом оказалось, что фундаментальные частицы, которые могут быть сопоставлены этой алгебре, не являются кварками. Так были введены гипотетические фундаментальные частицы – лептино.

Теперь, следуя исходному предположению, мы вынуждены рассматривать алгебру кварков как алгебру, в которой одна часть произведений базисных векторов образующего пространства антикоммутативна, а другая часть – коммутативна. В общем случае алгебру кварков будем обозначать  $\mathbb{Q}$ , а ее базисные векторы будем обозначать  $\lambda_i$ .

Настоящая Лекция посвящена алгебре нерелятивистских кварков  $\mathbb{Q}_3$ , образующим пространством которой является геометрическое пространство с базисными векторами

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3.$$

Будем полагать, что алгебра нерелятивистских кварков включает в себя три алгебры, отличающиеся правилами перестановки сомножителей в произведениях базисных векторов образующего пространства. Приведем эти перестановочные соотношения

$$\begin{aligned}\lambda_2 \circ \lambda_1 &= -\lambda_1 \circ \lambda_2, \\ \lambda_1 \circ \lambda_3 &= \lambda_3 \circ \lambda_1, \\ \lambda_3 \circ \lambda_2 &= -\lambda_2 \circ \lambda_3,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\lambda_2 \circ \lambda_1 &= -\lambda_1 \circ \lambda_2, \\ \lambda_1 \circ \lambda_3 &= -\lambda_3 \circ \lambda_1, \\ \lambda_3 \circ \lambda_2 &= \lambda_2 \circ \lambda_3,\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\lambda_2 \circ \lambda_1 &= \lambda_1 \circ \lambda_2, \\ \lambda_1 \circ \lambda_3 &= -\lambda_3 \circ \lambda_1, \\ \lambda_3 \circ \lambda_2 &= -\lambda_2 \circ \lambda_3,\end{aligned}\tag{3}$$

Указанные три алгебры поставим в соответствие трем поколениям кварков. Алгебру, включающую перестановочные соотношения первого типа, поставим в соответствие  $u$  и  $d$  кваркам и будем обозначать  $\mathbb{Q}(u, d)$ . Алгебру, включающую перестановочные соотношения второго типа, поставим в соответствие  $c$  и  $s$  кваркам и будем обозначать  $\mathbb{Q}(c, s)$ . Алгебру, включающую перестановочные соотношения третьего типа, поставим в соответствие  $t$  и  $b$  кваркам и будем обозначать  $\mathbb{Q}(t, b)$ . Алгебры  $\mathbb{Q}(u, d)$ ,  $\mathbb{Q}(c, s)$ ,  $\mathbb{Q}(t, b)$  содержат по двум антикоммутативным и одному коммутативному соотношениям. Следует ожидать, что это совпадение приведет к совпадению ряда динамических характеристик поколений кварков.

Здесь необходимо вспомнить ситуацию, с которой мы столкнулись при описании лептонов. В Лекции 5 мы установили, что алгебра Клиффорда  $\mathbb{C}_3$  является алгеброй действия и алгеброй пространства лептонов одного поколения. Наши рассуждения включали два этапа. Сначала мы обобщили алгебру  $\mathbb{C}_3$  до алгебры релятивистских лептонов  $\mathbb{C}_4$ , а затем записали уравнения квантовой механики для этой алгебры. Оказалось, что уравнения распадаются на две независимые системы уравнений, одна из которых относится к верхнему, а другая к нижнему лептонам одного поколения. Если допустить единую точку зрения на алгебраическую структуру лептонов и кварков, то нужно считать, что алгебра кварков  $\mathbb{Q}_3$  является алгеброй действия и алгеброй пространства кварков одного поколения (например,  $u$  и  $d$ ). Причем после того, как алгебра  $\mathbb{Q}_3$  будет обобщена до алгебры релятивистских кварков  $\mathbb{Q}_4$  и для нее будут записаны уравнения квантовой механики, то эти уравнения должны допустить возможность их записи в виде двух независимых систем уравнений. Одна из этих систем должна относиться к верхнему кварку (например,  $u$ ), а другая к нижнему кварку (например,  $d$ ) одного поколения. Наличие такой точки зрения на алгебраическую структуру фундаментальных частиц одного поколения является весьма желательным с позиции *единого* подхода к фундаментальным частицам. Именно эту точку зрения мы проводим, постулируя вышеуказанное соответствие алгебр и поколений кварков.

От алгебры  $\mathbb{Q}(u, d)$ , можно перейти к алгебре  $\mathbb{Q}(c, s)$  и затем к алгебре  $\mathbb{Q}(t, b)$ , выполняя циклическую перестановку индексов 1, 2, 3, нумерующих компоненты геометрического вектора. Таким образом, пере-

ход от волновых функций кварков одного поколения к волновым функциям кварков других поколений осуществляется циклической перестановкой индексов, нумерующих компоненты геометрического вектора. При этом само число поколений кварков равно размерности геометрического пространства, то есть трем. Здесь необходимо вспомнить, что в Лекции 5 было показано, что переход от волновых функций лептонов одного поколения к волновым функциям лептонов других поколений осуществляется циклической перестановкой индексов, нумерующих компоненты геометрического вектора, а само число поколений лептонов равно размерности геометрического пространства. Таким образом, мы имеем единую точку зрения, объясняющую как существование поколений фундаментальных частиц так и их число. Наличие такой точки зрения является необходимым условием построения единой теории взаимодействий.

## II. АЛГЕБРА НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ КВАРКОВ. ОБЩАЯ ЧАСТЬ

В соответствии с выдвинутым нами предположением алгебра  $\mathbb{Q}_3$  есть алгебра действия и алгебра пространства-времени фундаментальных частиц – кварков. Укажем базисные векторы этой алгебры и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\lambda_0$  – базисный вектор скалярной части вектора. Этот базисный вектор ничем не отличается от соответствующего вектора  $\varepsilon_0$  алгебры  $\mathbb{C}$ . Однако мы используем другое обозначение для того, чтобы подчеркнуть принадлежность этого вектора другой алгебре. Для  $\lambda_0$  имеет место правило умножения

$$\lambda_0 \circ \lambda_0 = \lambda_0 .$$

- Образующие векторы  $\lambda_a$ , где индекс  $a$  пробегает значения от 1 до 3. Нужно иметь в виду, что образующее пространство для алгебр  $\mathbb{Q}_3$  и  $\mathbb{C}_3$  одинаково. Поэтому векторы  $\lambda_a$  совпадают с векторами  $\varepsilon_a$ . Число векторов  $\lambda_a$  равно трем. Для них имеют место правила умножения

$$\lambda_a \circ \lambda_0 = \lambda_0 \circ \lambda_a = \lambda_a .$$

$$\lambda_a \circ \lambda_a = \lambda_0 .$$

- Векторы

$$\lambda_{ab} = \lambda_b \circ \lambda_a .$$

Здесь  $a \neq b$ . Число этих векторов равно числу сочетаний из трех элементов по два

$$C_3^2 = 3 .$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей (перестановочные соотношения), указанные в Разделе 1.

- Вектор

$$\lambda_{123} = \lambda_3 \circ \lambda_2 \circ \lambda_1 .$$

Для этих векторов выполняются правила умножения, вытекающие из условия ассоциативности и перестановочных соотношений.

### 1. Алгебра действия и алгебра пространства кварков

В последующих рассуждениях мы отталкиваемся от Раздела 5 Лекции 7. В указанном Разделе отмечалось, что для алгебры Клиффорда вследствие антикоммутативности умножения целесообразно ввести два умножения – правое и левое. Разновидность алгебры Клиффорда, связанная с правым умножением, рассматривалась нами как алгебра действия. Разновидность алгебры Клиффорда, связанная с левым умножением, рассматривалась нами как алгебра пространства-времени\*. Отсюда вытекало, что для лептонов динамические параметры пространства-времени и действия существенно различны.

Так же как в алгебре Клиффорда в алгебре кварков  $\mathbb{Q}$  правое и левое умножения различаются. Поэтому так же как для алгебры Клиффорда необходимо рассматривать алгебру кварков с правым умножением  $\mathbb{Q}_{right}$ , для которой закон умножения базисных векторов  $\lambda_I$  имеет вид

$$\lambda_K \circ \lambda_I = \lambda_L \cdot C_{KI}^L \quad (4)$$

и алгебру кварков с левым умножением  $\mathbb{Q}_{left}$ , для которой закон умножения базисных векторов  $\Lambda_I$  имеет вид

$$\Lambda_I \circ \Lambda_K = \Lambda_L \cdot {}^+C_{KI}^L . \quad (5)$$

Подобно тому, как мы полагали для лептонов, будем считать, что контравариантная алгебра  $\mathbb{Q}_{right}$  является алгеброй действия кварков, а контравариантная алгебра  $\mathbb{Q}_{left}$  является алгеброй пространства-времени кварков.

---

\*Смотрите Раздел 7 Лекции 8.

Для того, чтобы рассматривать действие антикварков необходимо перейти от контравариантной алгебры  $\mathbb{Q}_{right}$  к ковариантной алгебре  ${}^+\mathbb{Q}_{right}$ . Эта алгебра является также сопряженной по отношению к контравариантной алгебре<sup>†</sup>. Обозначим базисные векторы алгебры  ${}^+\mathbb{Q}_{right}$  через  $\lambda^I$ . Тогда закон умножения в этой алгебре имеет вид

$$\lambda^K \circ \lambda^I = {}^+C^{IK}_L \lambda^L. \quad (6)$$

Для того, чтобы рассматривать пространство-время антикварков необходимо перейти от контравариантной алгебры  $\mathbb{Q}_{left}$  к ковариантной алгебре  ${}^+\mathbb{Q}_{left}$ . Эта алгебра является также сопряженной по отношению к контравариантной алгебре. Обозначим базисные векторы алгебры  ${}^+\mathbb{Q}_{left}$  через  $\Lambda^I$ . Тогда закон умножения в этой алгебре имеет вид

$$\Lambda^I \circ \Lambda^K = C^{IK}_L \Lambda^L. \quad (7)$$

Так как структурные матрицы  $C^{L}_{KI}$  алгебры  $\mathbb{Q}_3$  и структурные матрицы  $C^{IK}_L$  сопряженной алгебры  ${}^+\mathbb{Q}_3$  не совпадают, то в нерелятивистском приближении кварк и антикварк это разные частицы.

## 2. Структурные матрицы алгебры кварков $\mathbb{Q}_3$ .

В последующих Разделах мы рассмотрим вычисление структурных матриц алгебры кварков  $\mathbb{Q}_3$ . При этом мы будем пользоваться опытом, полученным при выводе матриц Дирака. Обращение к матрицам Дирака научило нас следующему.

1. Компоненты векторов и матриц необходимо рассматривать в следующей последовательности индексов

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123).$$

2. Переход от действительного представления к компактным представлениям осуществляется путем введения соответствующих блочных матриц. При преобразовании матриц  $C^{L}_{KI}$  и  ${}^+C^{L}_{KI}$  от действительного представления к  $iab$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, & i &= \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \\ a &= \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, & b &= \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

При преобразовании матриц  $C^{L}_{KI}$  и  ${}^+C^{L}_{KI}$  от  $iab$ -представления к  $IAB$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$

<sup>†</sup>Обозначение ковариантных (сопряженных) алгебр  ${}^+\mathbb{Q}_{right}$  и  ${}^+\mathbb{Q}_{left}$  выполнено по аналогии с соответствующим обозначением для алгебры Клиффорда.

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, & I &= \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \\ A &= \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

\*

3. При переходе к частным случаям квантовой теории целесообразно пользоваться процедурой сжатия, или вырождения слагаемых компонент вектора.

Из (4) следует алгоритм вычисления структурных матриц алгебры  $\mathbb{Q}_{right}$ . Эти матрицы соответствуют базисным векторам  $\lambda_I$ . Сначала нужно установить номер структурной матрицы ( $I$ ) в соответствии с номером базисного вектора, затем для каждого столбца матрицы ( $K$ ) проделать следующие вычисления. Базисный вектор  $\lambda_K$ , номер которого совпадает с номером *столбца* матрицы, нужно умножить *справа* на базисный вектор  $\lambda_I$ , номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор  $\lambda_L$ , на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер ( $L$ ) указанного базисного вектора определит номер строки, на пересечении которой с рассматриваемым столбцом, необходимо поставить указанное численное значение проекции.

Из (5) следует алгоритм вычисления структурных матриц алгебры  $\mathbb{Q}_{left}$ . Эти матрицы соответствуют базисным векторам  $\Lambda_I$ . Сначала нужно установить номер структурной матрицы ( $I$ ) в соответствии с номером базисного вектора, затем для каждого столбца матрицы ( $K$ ) проделать следующие вычисления. Базисный вектор  $\Lambda_K$ , номер которого совпадает с номером *столбца* матрицы, нужно умножить *слева* на базисный вектор  $\Lambda_I$ , номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор  $\Lambda_L$ , на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер ( $L$ ) указанного базисного вектора определит номер строки, на пересечении которой с рассматриваемым столбцом, необходимо поставить указанное численное значение проекции.

\*Напомним (см. Лекцию 4), что для матриц  $i, a, b$  и соответствующих гиперчисел выполняются правила умножения

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 = 1, & i^2 &= -1, & ab &= -ba = i, \\ ai &= -ia = b, & ib &= -bi = a. \end{aligned}$$

Аналогично для матриц  $I, A, B$  и соответствующих гиперчисел выполняются правила умножения

$$\begin{aligned} A^2 &= B^2 = \mathbb{1}, & I^2 &= -\mathbb{1}, & AB &= -BA = I, \\ AI &= -IA = B, & IB &= -BI = A. \end{aligned}$$

Итак, в соответствии с нашим общим подходом мы должны, пользуясь правилами умножения векторов в алгебре  $\mathbb{Q}_3$ , найти структурные матрицы этой алгебры. Затем, анализируя свойства этих матриц, сделать заключение относительно свойств кварков.

### 3. Действительное представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_3$

Вычисление структурных матриц  $C_{KI}^L$  в действительном представлении будем выполнять по приведенному алгоритму для принятого ранее порядка индексов. То есть, будем записывать слагаемые вектора  $\psi$  в следующей последовательности

$$\psi = \lambda_{32} \psi^{32} + \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0 + \lambda_1 \psi^1 + \lambda_2 \psi^2 + \lambda_3 \psi^3 + \lambda_{123} \psi^{123}.$$

В результате получим действительные структурные матрицы размерности  $8 \times 8$ . (см. Разделы III 1, 5) Помимо действительного представления будем использовать *iab*-представление и *IAB*-представление базисных векторов алгебры кварков, удобные в силу своей компактности.

### 4. *iab*-представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_3$

*iab*-представление основано на следующем разложении вектора:

$$\psi = \lambda_{13} \circ (\lambda_{21} \psi^{32} + \lambda_0 \psi^{13}) + \lambda_0 \circ (\lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0) + \lambda_0 \circ (\lambda_{21} \psi^1 + \lambda_0 \psi^2) + \lambda_{123} \circ (\lambda_{21} \psi^3 + \lambda_0 \psi^{123}).$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{Q}_3$  в виде произведения  $\mathbb{Q}_2 \times \mathbb{Q}_1$  (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_2$  являются

$$\lambda_{13}, \quad \lambda_0, \quad \lambda_2, \quad \lambda_{123};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_1$  являются

$$\lambda_{21}, \quad \lambda_0.$$

Пространство  $\mathbb{Q}_1$  можно рассматривать как пространство либо комплексных чисел, либо *a*-чисел. Для этого базисному вектору  $\lambda_{21}$  алгебры  $\mathbb{Q}_1$  поставим в соответствие либо мнимую единицу, если  $\text{sign } \lambda_{21} = -1$ , либо *a*-единицу, если  $\text{sign } \lambda_{21} = 1$ , а базисному вектору  $\lambda_0$  алгебры  $\mathbb{Q}_1$  поставим в соответствие действительную единицу.

В *iab*-представлении структурные матрицы имеют размерность  $4 \times 4$  (см. Разделы III 1,5).

### 5. *IAB*-представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_3$

*IAB*-представление подалгебры  $\mathbb{Q}_3$  основано на разложении вектора:

$$\psi = (\lambda_{32} \psi^{32} + \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0) \circ \lambda_0 + (\lambda_{32} \psi^1 + \lambda_{13} \psi^2 + \lambda_{21} \psi^3 + \lambda_0 \psi^{123}) \circ \lambda_{123}.$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{Q}_3$  в виде произведения  $\mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_2$ . Базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_1$  являются

$$\lambda_0, \quad \lambda_{123};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_2$  являются

$$\lambda_{32}, \quad \lambda_{13}, \quad \lambda_{21}, \quad \lambda_0.$$

Последнюю алгебру мы назовем *IAB*-алгеброй. Эта алгебра аналогична алгебре кватернионов. В этом представлении базисные векторы  $\lambda_{32}, \lambda_{13}, \lambda_{21}, \lambda_0$  заменяются на гиперчисла *IAB*-алгебры. Отсюда видно, что в *IAB*-представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\lambda_0, \lambda_{123}$ .

*IAB*-представление базисных векторов дается структурными матрицами  $2 \times 2$  (см. Разделы III 1, 5).

## III. АЛГЕБРА КВАРКОВ ПЕРВОГО ПОКОЛЕНИЯ $\mathbb{Q}(U, D)$

В соответствии с выдвинутым нами предположением коммутативно-антикоммутативная алгебра  $\mathbb{Q}(u, d)$  есть алгебра действия и алгебра пространства-времени кварков первого поколения. Укажем базисные векторы этой алгебры и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\lambda_0$  – базисный вектор скалярной части вектора. Для  $\lambda_0$  имеет место правило умножения

$$\lambda_0 \circ \lambda_0 = \lambda_0.$$

- Образующие базисные векторы  $\lambda_a$ , где индекс *a* пробегает значения от 1 до 3, есть базисные векторы геометрического пространства. Число векторов  $\lambda_a$  равно трем. Для них имеют место правила умножения

$$\lambda_a \circ \lambda_0 = \lambda_0 \circ \lambda_a = \lambda_a.$$

$$\lambda_a \circ \lambda_a = \lambda_0.$$

- Векторы

$$\lambda_{ab} = \lambda_b \circ \lambda_a.$$

Здесь  $a \neq b$ .

В соответствии с Разделом I для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей – перестановочные соотношения

$$\lambda_{12} = -\lambda_{21},$$

$$\lambda_{13} = \lambda_{31},$$

$$\lambda_{32} = -\lambda_{23}.$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и перестановочных соотношений. В частности,

$$\lambda_{21} \circ \lambda_{21} = -\lambda_0,$$

$$\lambda_{13} \circ \lambda_{13} = \lambda_0,$$

$$\lambda_{32} \circ \lambda_{32} = -\lambda_0.$$

• Вектор

$$\lambda_{123} = \lambda_3 \circ \lambda_2 \circ \lambda_1.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей

$$\lambda_{123} = -\lambda_{213} = -\lambda_{231} = \lambda_{321} = -\lambda_{312} = -\lambda_{132}.$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\lambda_{123} \circ \lambda_{123} = \lambda_0.$$

**1. Структурные матрицы контравариантной алгебры действия кварков первого поколения**  
 $\mathbb{Q}(u, d)_{right}$

Вычисление этих матриц выполним в соответствии с Разделом II 1 на основании формулы (4)

$$\lambda_0 \sim \begin{array}{c} 32 \quad 13 \quad 21 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\lambda_1 \sim \begin{array}{c} 32 \quad 13 \quad 21 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & A \\ \hline A & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\lambda_2 \sim \begin{array}{c} 32 \quad 13 \quad 21 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline 1 & \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & -I \\ \hline I & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\lambda_3 \sim \begin{array}{c} 32 \quad 13 \quad 21 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\lambda_{21} \sim \begin{array}{c} 32 \quad 13 \quad 21 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & \\ \hline 1 & \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & \\ \hline 1 & \\ \hline 1 & -1 \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline B & \\ \hline -B & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\lambda_{13} \sim \begin{array}{c} 32 \quad 13 \quad 21 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & \\ \hline -1 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 1 & -1 \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline A & \\ \hline -A & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\lambda_{32} \sim \begin{array}{c} 32 \quad 13 \quad 21 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline -1 & \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline I & \\ \hline I & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\lambda_{123} \sim \begin{array}{c} 32 \quad 13 \quad 21 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline & -1 \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline -1 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline B & \\ \hline B & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

**2. Действительное представление алгебры кварков  $\mathbb{Q}(u, d)_{right}$**

Структурные матрицы  $C_{KI}^L$  в действительном представлении вычислены по алгоритму, приведенному в Разделе II, для принятого ранее порядка индексов. При этом слагаемые вектора  $\psi$  записываются в следующей последовательности

$$\psi = \lambda_{32} \psi^{32} + \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0 + \lambda_1 \psi^1 + \lambda_2 \psi^2 + \lambda_3 \psi^3 + \lambda_{123} \psi^{123}.$$

В результате мы получили действительные структурные матрицы  $\lambda_K$  размерности  $8 \times 8$ . Помимо действительного представления мы использовали *iab*-представление.

### 3. *iab*-представление алгебры кварков $\mathbb{Q}(u, d)_{right}$

*iab*-представление основано на следующем разложении вектора:

$$\psi = \lambda_{13} \circ (\lambda_{21} \psi^{32} + \lambda_0 \psi^{13}) + \lambda_0 \circ (\lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0) + \lambda_2 \circ (\lambda_{21} \psi^1 + \lambda_0 \psi^2) + \lambda_{123} \circ (\lambda_{21} \psi^3 + \lambda_0 \psi^{123}).$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{Q}_3$  в виде произведения  $\mathbb{Q}_2 \times \mathbb{Q}_1$  (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_2$  являются

$$\lambda_{13}, \quad \lambda_0, \quad \lambda_2, \quad \lambda_{123};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_1$  являются

$$\lambda_{21}, \quad \lambda_0.$$

Пространство  $\mathbb{Q}_1$  можно рассматривать как пространство комплексных чисел. Для этого базисному вектору  $\lambda_{21}$  алгебры  $\mathbb{Q}_1$  поставим в соответствие мнимую единицу, учитывая, что  $\text{sign } \lambda_{21} = -1$ , а базисному вектору  $\lambda_0$  этой алгебры поставим в соответствие действительную единицу.

$$\lambda_{21} \sim i, \quad \lambda_0 \sim 1.$$

В результате получим вектор алгебры  $\mathbb{Q}_3$  в *iab*-представлении

$$\psi = \lambda_{13} \circ (i \psi^{32} + \psi^{13}) + \lambda_0 \circ (i \psi^{21} + \psi^0) + \lambda_2 \circ (i \psi^1 + \psi^2) + \lambda_{123} \circ (i \psi^3 + \psi^{123}). \quad (8)$$

Таким образом, в *iab*-представлении координаты (компоненты) вектора являются комплексными числами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned} \psi^{13} &= i \psi^{32} + \psi^{13}, & \psi^0 &= i \psi^{21} + \psi^0, \\ \psi^2 &= i \psi^1 + \psi^2, & \psi^{123} &= i \psi^3 + \psi^{123}. \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать

$$\psi = \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_0 \psi^0 + \lambda_2 \psi^2 + \lambda_{123} \psi^{123}. \quad (10)$$

Отсюда видно, что в *iab*-представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\lambda_{13}, \lambda_0, \lambda_2, \lambda_{123}$ .

В *iab*-представлении структурные матрицы имеют размерность  $4 \times 4$ . От *iab*-представления мы перешли к *IAB*-представлению.

### 4. *IAB*-представление алгебры кварков $\mathbb{Q}(u, d)_{right}$

*IAB*-представление подалгебры  $\mathbb{Q}_3$  основано на разложении вектора:

$$\psi = (\lambda_{32} \psi^{32} + \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0) \circ \lambda_0 + (\lambda_{32} \psi^1 + \lambda_{13} \psi^2 + \lambda_{21} \psi^3 + \lambda_0 \psi^{123}) \circ \lambda_{123}.$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{Q}_3$  в виде произведения  $\mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_2$ . Базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_1$  являются

$$\lambda_0, \quad \lambda_{123};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_2$  являются

$$\lambda_{32}, \quad \lambda_{13}, \quad \lambda_{21}, \quad \lambda_0.$$

$$\text{sign } \lambda_{32} = \text{sign } \lambda_{21} = -1, \quad \text{sign } \lambda_{13} = \text{sign } \lambda_0 = 1.$$

Последнюю алгебру мы назовем *IAB*-алгеброй. Эта алгебра аналогична алгебре кватернионов. Для базисных единиц *IAB*-алгебры используем следующие обозначения

$$a \cdot I, \quad b \cdot A, \quad i \cdot B, \quad \mathbb{1}.$$

Заменим базисные векторы  $\lambda_{32}, \lambda_{13}, \lambda_{21}, \lambda_0$  приведенными гиперчислами в соответствии

$$\begin{aligned} \lambda_{32} &\sim a I, \\ \lambda_{13} &\sim b A, \\ \lambda_{21} &\sim i B, \\ \lambda_0 &\sim \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Получим вектор алгебры  $\mathbb{Q}_3$  в *IAB*-представлении \*

$$\psi = (a \cdot I \psi^{32} + b \cdot A \psi^{13} + i \cdot B \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0) \circ \lambda_0 + (a \cdot I \psi^1 + b \cdot A \psi^2 + i \cdot B \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}) \circ \lambda_{123}.$$

Таким образом, в *IAB*-представлении координаты (компоненты) вектора являются гиперчислами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= a I \psi^{32} + b A \psi^{13} + i B \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0, \\ \Psi^{123} &= a I \psi^1 + b A \psi^2 + i B \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать

$$\psi = \Psi^0 \lambda_0 + \Psi^{123} \lambda_{123}.$$

Отсюда видно, что в *IAB*-представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\lambda_0, \lambda_{123}$ .

В *IAB*-представлении структурные матрицы имеют размерность  $2 \times 2$  (см. Раздел III 1).

---

\*Заметим, что при умножении базисных единиц первые и вторые сомножители умножаются отдельно. Например,

$$(a \cdot I) \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot (I \cdot A) = -i \cdot B.$$

## 5. Структурные матрицы контравариантной алгебры пространства кварков первого поколения $\mathbb{Q}(u, d)_{left}$

Вычисление этих матриц выполним в соответствии с Разделом II 3 на основании формулы (5)

$$\Lambda_0 \sim \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\Lambda_1 \sim \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$\Lambda_2 \sim \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$\Lambda_3 \sim \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\Lambda_{21} \sim \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline -1 & \\ \hline 1 & \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline -1 & \\ \hline 1 & \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline -1 & \\ \hline 1 & \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$\Lambda_{13} \sim \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline -1 & \\ \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline -1 & \\ \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline -1 & \\ \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\Lambda_{32} \sim \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$\Lambda_{123} \sim \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array}$$

## IV. АЛГЕБРА КВАРКОВ ВТОРОГО ПОКОЛЕНИЯ $\mathbb{Q}(C, S)$

В соответствии с выдвинутым нами предположением коммутативно-антикоммутативная алгебра  $\mathbb{Q}(c, s)$  есть алгебра действия и алгебра пространства-времени фундаментальных частиц –  $c$  и  $s$  кварков. Укажем базисные векторы этой алгебры и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\lambda_0$  – базисный вектор скалярной части вектора. Для  $\lambda_0$  имеет место правило умножения

$$\lambda_0 \circ \lambda_0 = \lambda_0 .$$

- Образующие базисные векторы  $\lambda_a$ , где индекс  $a$  пробегает значения от 1 до 3, есть базисные векторы геометрического пространства. Число векторов  $\lambda_a$  равно трем. Для них имеют место правила умножения

$$\lambda_a \circ \lambda_0 = \lambda_0 \circ \lambda_a = \lambda_a .$$

$$\lambda_a \circ \lambda_a = \lambda_0 .$$

- Векторы

$$\lambda_{ab} = \lambda_b \circ \lambda_a .$$

Здесь  $a \neq b$ . Число этих векторов равно трем. В соответствии с Разделом I для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей – перестановочные соотношения

$$\lambda_{12} = -\lambda_{21} ,$$

$$\lambda_{13} = -\lambda_{31} ,$$

$$\lambda_{32} = \lambda_{23} .$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и перестановочных соотношений. В частности,

$$\begin{aligned}\lambda_{21} \circ \lambda_{21} &= -\lambda_0, \\ \lambda_{13} \circ \lambda_{13} &= -\lambda_0, \\ \lambda_{32} \circ \lambda_{32} &= \lambda_0.\end{aligned}$$

- Вектор

$$\lambda_{123} = \lambda_3 \circ \lambda_2 \circ \lambda_1.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей

$$\lambda_{123} = -\lambda_{213} = \lambda_{231} = \lambda_{321} = -\lambda_{312} = \lambda_{132}.$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\lambda_{123} \circ \lambda_{123} = \lambda_0.$$

## V. АЛГЕБРА КВАРКОВ ТРЕТЬЕГО ПОКОЛЕНИЯ $\mathbb{Q}(T, B)$

В соответствии с выдвинутым нами предположением коммутативно-антикоммутативная алгебра  $\mathbb{Q}(t, b)$  есть алгебра действия и алгебра пространства-времени фундаментальных частиц –  $t$  и  $b$  кварков. Укажем базисные векторы этой алгебры и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\lambda_0$  – базисный вектор скалярной части вектора. Для  $\lambda_0$  имеет место правило умножения

$$\lambda_0 \circ \lambda_0 = \lambda_0.$$

- Образующие базисные векторы  $\lambda_a$ , где индекс  $a$  пробегает значения от 1 до 3, есть базисные векторы геометрического пространства. Число векторов  $\lambda_a$  равно трем. Для них имеют место правила умножения

$$\lambda_a \circ \lambda_0 = \lambda_0 \circ \lambda_a = \lambda_a.$$

$$\lambda_a \circ \lambda_a = \lambda_0.$$

- Векторы

$$\lambda_{ab} = \lambda_b \circ \lambda_a.$$

Здесь  $a \neq b$ . Число этих векторов равно трем. В соответствии с Разделом I для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей – перестановочные соотношения

$$\begin{aligned}\lambda_{12} &= \lambda_{21}, \\ \lambda_{13} &= -\lambda_{31}, \\ \lambda_{32} &= -\lambda_{23}.\end{aligned}$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и перестановочных соотношений. В частности,

$$\begin{aligned}\lambda_{21} \circ \lambda_{21} &= \lambda_0, \\ \lambda_{13} \circ \lambda_{13} &= -\lambda_0, \\ \lambda_{32} \circ \lambda_{32} &= -\lambda_0.\end{aligned}$$

- Вектор

$$\lambda_{123} = \lambda_3 \circ \lambda_2 \circ \lambda_1.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей

$$\lambda_{123} = \lambda_{213} = -\lambda_{231} = \lambda_{321} = \lambda_{312} = -\lambda_{132}.$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\lambda_{123} \circ \lambda_{123} = \lambda_0.$$

## VI. ГЕНЕРАТОРЫ АРОМАТИЧЕСКОЙ $SU(3)$ ГРУППЫ

В этом Разделе мы попытаемся вычислить матрицы Гелл-Манна. Напомним следующее. Если каждый из кварков  $u$ ,  $d$ ,  $s$  характеризовать комплексной волновой функцией и построить на этих функциях трехмерное комплексное пространство, то на этом пространстве действует ароматическая  $SU(3)$  группа. Генераторами этой группы являются матрицы Гелл-Манна

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &\sim \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2 \sim \begin{bmatrix} & -i & \\ i & & \\ & & \end{bmatrix}, \quad \Lambda_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \end{bmatrix}, \\ \Lambda_4 &\sim \begin{bmatrix} & & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix}, \quad \Lambda_5 \sim \begin{bmatrix} & & \\ & & -i \\ & i & \end{bmatrix}, \quad \Lambda_6 \sim \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}, \\ \Lambda_7 &\sim \begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ 1 & & \end{bmatrix}, \quad \Lambda_8 \sim \begin{bmatrix} & & -i \\ & & \\ i & & \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Мы попытаемся вычислить матрицы Гелл-Манна, рассматривая их как структурные матрицы некоторой алгебры, объединяющей алгебры пространств  $u$ ,  $d$  и  $s$  кварков. Эту задачу мы будем решать при ряде допущений. Во-первых, положим, что указанные



алгебры являются алгебрами Клиффорда. Запишем векторы в каждой из алгебр

$$x^u = \Lambda_0^u x^0 + \Lambda_a^u x^a + \Lambda_{ab}^u x^{ab} + \Lambda_{123}^u x^{123},$$

$$y^d = \Lambda_0^d y^0 + \Lambda_a^d y^a + \Lambda_{ab}^d y^{ab} + \Lambda_{123}^d y^{123},$$

$$z^s = \Lambda_0^s z^0 + \Lambda_a^s z^a + \Lambda_{ab}^s z^{ab} + \Lambda_{123}^s z^{123}.$$

Здесь в силу нашего допущения

$$\Lambda_{ab} = -\Lambda_{ba}.$$

Во-вторых, будем рассматривать не полные векторы, а их частные случаи

$$x^u = \Lambda_0^u x^0 + \Lambda_{ab}^u x^{ab},$$

$$y^d = \Lambda_0^d y^0 + \Lambda_{ab}^d y^{ab},$$

$$z^s = \Lambda_0^s z^0 + \Lambda_{ab}^s z^{ab}.$$

Каждый из этих векторов определяет подалгебру соответственно в алгебрах пространств  $u$ ,  $d$  и  $s$  кварков. И теперь объединим полученные подалгебры в общую алгебру, представляя ее вектором

$$w = x^u + y^d + z^s.$$

Эту алгебру обозначим  $\mathbb{Q}(u, d, s)$ . Далее выполним процедуру сжатия алгебры  $\mathbb{Q}(u, d, s)$  путем отождествления следующих базисных векторов

$$\begin{aligned} \Lambda_{32}^u &\equiv \Lambda_{21}^s, & \Lambda_{13}^u &\equiv \Lambda_0^s, \\ \Lambda_{21}^u &\equiv \Lambda_{32}^d, & \Lambda_0^u &\equiv \Lambda_{13}^d, \\ \Lambda_{21}^d &\equiv \Lambda_{32}^s, & \Lambda_0^d &\equiv \Lambda_{13}^s, \end{aligned}$$

И, наконец, вычислим структурные матрицы  $\Lambda_{ab}$  алгебры  $\mathbb{Q}(u, d, s)$  в сжатом представлении. Вычисления выполним в соответствии с алгоритмом, указанным в Разделе II 2. Получим

$$\Lambda_{32}^u \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s & 21 & 0 & 32 & 13 \\ d & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{ccc|ccc} 21 & 32 & & & & \\ 0 & 13 & & & & \\ & 32 & 21 & & & \\ & 13 & 0 & & & \\ & 32 & 21 & & & \\ & 13 & 0 & & & \end{array} \end{array} = i \begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}$$

$$\Lambda_{13}^u \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s & 21 & 0 & 32 & 13 \\ d & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{ccc|ccc} 21 & 32 & & & & \\ 0 & 13 & & & & \\ & 32 & 21 & & & \\ & 13 & 0 & & & \\ & 32 & 21 & & & \\ & 13 & 0 & & & \end{array} \end{array} = i \begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}$$

$$\Lambda_{21}^u \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s & 21 & 0 & 32 & 13 \\ d & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{ccc|ccc} 21 & 32 & & & & \\ 0 & 13 & & & & \\ & 32 & 21 & & & \\ & 13 & 0 & & & \\ & 32 & 21 & & & \\ & 13 & 0 & & & \end{array} \end{array} = i \begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}$$

$$\Lambda_{32}^d \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s & 21 & 0 & 32 & 13 \\ d & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{ccc|ccc} 21 & 32 & & & & \\ 0 & 13 & & & & \\ & 32 & 21 & & & \\ & 13 & 0 & & & \\ & 32 & 21 & & & \\ & 13 & 0 & & & \end{array} \end{array} = i \begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}$$

$$\Lambda_{13}^d \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s & 21 & 0 & 32 & 13 \\ d & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{ccc|ccc} 21 & 32 & & & & \\ 0 & 13 & & & & \\ & 32 & 21 & & & \\ & 13 & 0 & & & \\ & 32 & 21 & & & \\ & 13 & 0 & & & \end{array} \end{array} = i \begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}$$

$$\Lambda_{21}^d \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s & 21 & 0 & 32 & 13 \\ d & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{ccc|ccc} 21 & 32 & & & & \\ 0 & 13 & & & & \\ & 32 & 21 & & & \\ & 13 & 0 & & & \\ & 32 & 21 & & & \\ & 13 & 0 & & & \end{array} \end{array} = i \begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}$$

$$\Lambda_{32}^s \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s & 21 & 0 & 32 & 13 \\ d & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{ccc|ccc} 21 & 32 & & & & \\ 0 & 13 & & & & \\ & 32 & 21 & & & \\ & 13 & 0 & & & \\ & 32 & 21 & & & \\ & 13 & 0 & & & \end{array} \end{array} = i \begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}$$

$$\Lambda_{13}^s \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s & 21 & 0 & 32 & 13 \\ d & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{ccc|ccc} 21 & 32 & & & & \\ 0 & 13 & & & & \\ & 32 & 21 & & & \\ & 13 & 0 & & & \\ & 32 & 21 & & & \\ & 13 & 0 & & & \end{array} \end{array} = i \begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}$$

$$\Lambda_{21}^s \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s & 21 & 0 & 32 & 13 \\ d & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{ccc|ccc} 21 & 32 & & & & \\ 0 & 13 & & & & \\ & 32 & 21 & & & \\ & 13 & 0 & & & \\ & 32 & 21 & & & \\ & 13 & 0 & & & \end{array} \end{array} = i \begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}$$

Число приведенных матриц равно девяти, однако, матрицы  $\Lambda_{21}^u$ ,  $\Lambda_{21}^d$ ,  $\Lambda_{21}^s$  связаны между собой тождеством

$$\Lambda_{21}^u + \Lambda_{21}^d + \Lambda_{21}^s = 0.$$

Следовательно, только две из указанных матриц являются линейно независимыми, или две линейные комбинации с их участием. В частности, в качестве линейно независимых матриц могут быть выбраны  $\Lambda_{21}^u$  и

$$\Lambda_6 = \Lambda_{21}^s - \Lambda_{21}^d \sim \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & -2 \\ \hline \end{array}$$

Поэтому общее число линейно независимых матриц  $\Lambda_{ab}$  равно восьми и эти матрицы есть матрицы Гелл-Манна с точностью до постоянного множителя.

## VII. ВЫВОДЫ

- Над геометрическим пространством можно построить три алгебры, содержащих два антикоммутирующих и одно коммутативное перестановочные соотношения. Эти алгебры ставятся в соответствие трем поколениям кваркам.
- Волновые функции кварков разных поколений отличаются друг от друга циклической перестановкой трех базисных векторов образующего геометрического пространства. Это правило совпадает с правилом, установленным для волновых функций лептонов разных поколений.
- Мы получили структурные матрицы алгебры кварков  $\mathbb{Q}_3$  по такому же алгоритму, по которому в Лекции 3 были выведены матрицы Дирака. Для нас это обстоятельство является свидетельством в пользу того, что предлагаемый подход к описанию фундаментальных частиц содержит элементы *единой* теории.
- Матрицы Гелл-Манна являются структурными матрицами алгебры, охватывающей алгебры  $u$ ,  $d$ ,  $s$  кварков.