

Лекция 3. Можно ли вывести матрицы Дирака?

А. А. Кеца́рис
(5 июня 2003 г.)

В этой лекции мы попытаемся вывести матрицы Дирака из правил умножения в алгебре Клиффорда.

I. ВВЕДЕНИЕ

Мы предположили, что структурные матрицы искомой алгебры действия как-то связаны с матрицами Дирака. Но сами структурные матрицы определяются законами умножения алгебры (в нашем случае законами умножения векторов в алгебре Клиффорда). Следовательно, между этими законами и матрицами Дирака должна быть взаимосвязь. Если нам удастся вывести матрицы Дирака, исходя из законов умножения алгебры, принятой за алгебру действия, то это будет свидетельством в пользу нашего замысла. А если учесть, что строгий вывод матриц Дирака в настоящее время отсутствует, то получение такого вывода само по себе представляет интерес.

II. ТЕНЗОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И КОВАРИАНТНАЯ АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ

Назовем *контравариантными* векторы

$$S = e_K \cdot S^K,$$

которыми представлена алгебра действия \mathbb{S} . Соответственно саму алгебру \mathbb{S} мы будем называть *контравариантной*. Наряду с контравариантной алгеброй действия \mathbb{S} мы будем рассматривать *ковариантную* алгебру действия, которую обозначим $\tilde{\mathbb{S}}$. Ее векторы мы обозначим

$$\tilde{S} = S_K \cdot E^K,$$

где S_K – координаты ковариантного вектора, E^K – базисные векторы ковариантной алгебры действия. Связь между контра и ковариантными алгебрами действия установим с помощью следующих преобразований

$$S_I = \delta_{IK} \cdot S^K, \quad E^I = a^{IK} \cdot e_K,$$

где δ_{IK} – символ Кронеккера, а a^{IK} – нетривиальный тензор, который назовем *тензором преобразования**. В Лекции 8 мы покажем, тензор преобразований есть метрический тензор в алгебре Клиффорда.

Матрицы Дирака мы свяжем с регулярным представлением ковариантной алгебры действия $\tilde{\mathbb{S}}$.

III. РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БАЗИСНЫХ ВЕКТОРОВ В КОВАРИАНТНОЙ АЛГЕБРЕ ДЕЙСТВИЯ

Зададим закон умножения базисных векторов в ковариантной алгебре действия $\tilde{\mathbb{S}}$ следующим образом:

$$E^I \circ E^K = C^{IK}_L \cdot E^L, \quad (1)$$

где C^{IK}_L есть структурные постоянные ковариантной алгебры действия $\tilde{\mathbb{S}}$.

Как и прежде будем полагать, что алгебра $\tilde{\mathbb{S}}$ является ассоциативной. То есть, произведение нескольких векторов не зависит от порядка умножения сомножителей. Это условие может быть сведено к условию ассоциативности

$$\tilde{S}_1 \circ (\tilde{S}_2 \circ \tilde{S}_3) = (\tilde{S}_1 \circ \tilde{S}_2) \circ \tilde{S}_3.$$

Запишем условие ассоциативности для произведения трех базисных векторов

$$E^I \circ (E^K \circ E^N) = (E^I \circ E^K) \circ E^N$$

Отсюда, используя закон умножения базисных векторов (1), получим

$$C^{KN}_L \cdot (E^I \circ E^L) = C^{IK}_L \cdot (E^L \circ E^N).$$

Откуда

$$C^{KN}_L \cdot C^{IL}_M = C^{IK}_L \cdot C^{LN}_M. \quad (2)$$

Сравнивая это выражение с самим законом умножения базисных векторов (1), заключаем, что базисным векторам E^I можно поставить в соответствие структурные матрицы C^{IL}_M . При этом о-умножению базисных векторов ставится в соответствие обычное умножение матриц в обратном порядке. Это соответствие

*Тензор преобразования определен, если определены произведения базисных векторов в контра и ковариантной алгебрах.

составляет *регулярное (присоединенное) представление* алгебры $\tilde{\mathbb{S}}$ и обозначается:

$$E^I \sim C^{IK}_L.$$

Номер структурной матрицы I есть индекс базисного вектора, который представлен этой матрицей. В регулярном представлении произвольному вектору алгебры $\tilde{S} = S_I E^I$ соответствует матрица

$$S^K_L = S_I \cdot C^{IK}_L. \quad (3)$$

IV. КОВАРИАНТНАЯ АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ КАК АЛГЕБРА КЛИФФОРДА.

В соответствии с нашей программой также будем рассматривать ковариантную алгебру действия как алгебру Клиффорда. В этом случае ковариантную алгебру действия будем называть ковариантной алгеброй Клиффорда и обозначать $\tilde{\mathbb{C}}$, а обозначение $\tilde{\mathbb{S}}$ оставим для общего случая. Базисные векторы для ковариантной алгебры Клиффорда будем обозначать \mathcal{E}^I , оставляя обозначение E^I для общего случая.

Перепишем закон умножения базисных векторов (1) для принятых обозначений:

$$\mathcal{E}^I \circ \mathcal{E}^K = C^{IK}_L \mathcal{E}^L, \quad (4)$$

где C^{IK}_L есть структурные постоянные* ковариантной алгебры действия $\tilde{\mathbb{C}}$.

Итак в соответствии с принятой нами программой мы имеем алгебру Клиффорда, построенную на шестнадцати базисных векторах \mathcal{E}^I , где индекс I пробегает значения от 0 до 15. Укажем эти векторы и правила умножения, которым они подчиняются.

- \mathcal{E}_0 . Для него имеет место правило умножения

$$\mathcal{E}^0 \circ \mathcal{E}^0 = \mathcal{E}^0.$$

- \mathcal{E}^i , где индекс i пробегает значения от 1 до 4. Эти векторы являются *образующими*. Для них имеют место правила умножения

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^i \circ \mathcal{E}^0 &= \mathcal{E}^0 \circ \mathcal{E}^i = \mathcal{E}^i, \\ \mathcal{E}^i \circ \mathcal{E}^i &= \text{sign } \mathcal{E}^i, \end{aligned}$$

где

$$\text{sign } \mathcal{E}^1 = \text{sign } \mathcal{E}^2 = \text{sign } \mathcal{E}^3 = -\text{sign } \mathcal{E}^4 = \mathcal{E}^0.$$

*Обозначение структурных постоянных оставим прежним.

- Векторы $\mathcal{E}^{ik} = \mathcal{E}^k \circ \mathcal{E}^i$, ($i \neq k$), для которых выполняется правило перестановки индексов и, соответственно, сомножителей – условие антикоммутативности произведения

$$\mathcal{E}^{ik} = -\mathcal{E}^{ki}.$$

Остальные правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условий ассоциативности и антикоммутативности. В частности,

$$\mathcal{E}^{ik} \circ \mathcal{E}^{ik} = -\mathcal{E}^i \circ (\mathcal{E}^k \circ \mathcal{E}^k) \circ \mathcal{E}^i = -\text{sign } \mathcal{E}^i \circ \text{sign } \mathcal{E}^k.$$

- Векторы $\mathcal{E}^{ikl} = \mathcal{E}^i \circ \mathcal{E}^k \circ \mathcal{E}^l$, ($i \neq k, i \neq l, k \neq l$), для которых выполняются следующие правила перестановки индексов, вытекающие из из условий ассоциативности и антикоммутативности

$$\mathcal{E}^{ikl} = \mathcal{E}^{kli} = \mathcal{E}^{lik} = -\mathcal{E}^{kil} = -\mathcal{E}^{ilk} = -\mathcal{E}^{lki}.$$

Остальные правила умножения этих векторов также следуют из из условий ассоциативности и антикоммутативности. В частности,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{ikl} \circ \mathcal{E}^{ikl} &= -\mathcal{E}^i \circ (\mathcal{E}^k \circ (\mathcal{E}^l \circ \mathcal{E}^l) \circ \mathcal{E}^k) \circ \mathcal{E}^i = \\ &= -\text{sign } \mathcal{E}^i \circ \text{sign } \mathcal{E}^k \circ \text{sign } \mathcal{E}^l. \end{aligned}$$

- Вектор $\mathcal{E}^{iklm} = \mathcal{E}^m \circ \mathcal{E}^l \circ \mathcal{E}^k \circ \mathcal{E}^i$, ($i \neq k, i \neq l, i \neq m, k \neq l, k \neq m, l \neq m$). Для этого вектора выполняются следующие правила перестановки индексов, вытекающие из условий ассоциативности и антикоммутативности

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{iklm} &= \mathcal{E}^{ilmk} = \mathcal{E}^{imkl} = -\mathcal{E}^{ilkm} = \\ &= -\mathcal{E}^{ikml} = -\mathcal{E}^{imlk} = -\mathcal{E}^{klmi} = -\mathcal{E}^{kmil} = \\ &= -\mathcal{E}^{kilm} = \mathcal{E}^{kmli} = \mathcal{E}^{klim} = \mathcal{E}^{kiml} = \\ &= \mathcal{E}^{lmik} = \mathcal{E}^{likm} = \mathcal{E}^{lmki} = -\mathcal{E}^{limk} = \\ &= -\mathcal{E}^{lmki} = -\mathcal{E}^{lkim} = -\mathcal{E}^{mikl} = -\mathcal{E}^{mkli} = \\ &= -\mathcal{E}^{mlki} = \mathcal{E}^{mkil} = \mathcal{E}^{mil k} = \mathcal{E}^{mkl i}. \end{aligned}$$

Остальные правила умножения, в которых участвует этот вектор, также следуют из из условий ассоциативности и антикоммутативности. В частности,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{iklm} \circ \mathcal{E}^{iklm} &= \\ \mathcal{E}^i \circ (\mathcal{E}^k \circ (\mathcal{E}^l \circ (\mathcal{E}^m \circ \mathcal{E}^m) \circ \mathcal{E}^l) \circ \mathcal{E}^k) \circ \mathcal{E}^i &= \\ \text{sign } \mathcal{E}^i \circ \text{sign } \mathcal{E}^k \circ \text{sign } \mathcal{E}^l \circ \text{sign } \mathcal{E}^m. \end{aligned}$$

В том случае, когда необходимо подчеркнуть размерность образующего пространства алгебры Клиффорда, мы будем использовать обозначение $\tilde{\mathbb{C}}_4$ вместо обозначения $\tilde{\mathbb{C}}$. Это особенно полезно при выделении подалгебры алгебры Клиффорда. Например, подалгебру с тремя образующими базисными векторами (например, $\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2, \mathcal{E}^3$), удобно обозначать $\tilde{\mathbb{C}}_3$.

В соответствии с нашим общим замыслом мы должны для указанных базисных векторов \mathcal{E}^I , пользуясь правилами умножения векторов в алгебре Клиффорда, найти из (4) структурные матрицы C^{IK}_L и сравнить их с матрицами Дирака.

V. СТРУКТУРНЫЕ МАТРИЦЫ КОВАРИАНТНОЙ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА.

Далее рассмотрим структурные матрицы, которыми представляются базисные векторы алгебры Клиффорда $\tilde{\mathbb{C}}$:

$$\mathcal{E}^I \sim C^{IK}_L.$$

Здесь номер структурной матрицы I есть индекс базисного вектора, который может быть представлен этой матрицей. Индекс K нумерует строки, а индекс L нумерует столбцы структурной матрицы.

1. Действительное представление ковариантной алгебры Клиффорда.

Из (4) следует алгоритм вычисления структурных матриц, соответствующих базисным векторам. Сначала нужно установить номер структурной матрицы в соответствии с номером базисного вектора. Затем для вычисления элемента структурной матрицы с номером I , расположенного в строке с номером K и в столбце с номером L , необходимо базисный вектор, номер которого совпадает с номером *строки* матрицы, умножить *слева* на базисный вектор, номер которого совпадает с номером *столбца* матрицы. Далее нужно определить базисный вектор, на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер L указанного базисного вектора определит номер столбца, на пересечении которого с рассматриваемой строкой, необходимо поставить указанное численное значение проекции.

Теперь вычислим структурные матрицы C^{IK}_L по приведенному алгоритму для двух случаев

1. подалгебра $\tilde{\mathbb{C}}_3$ с тремя образующими базисными векторами $\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2, \mathcal{E}^3$;

2. алгебра $\tilde{\mathbb{C}}_4$ с четырьмя образующими базисными векторами $\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2, \mathcal{E}^3, \mathcal{E}^4$.

Для подалгебры $\tilde{\mathbb{C}}_3$ будем вычислять структурные матрицы для особого порядка индексов*:

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123).$$

То есть, будем записывать слагаемые вектора в следующей последовательности

$$\tilde{S} = S_{32} \mathcal{E}^{32} + S_{13} \mathcal{E}^{13} + S_{21} \mathcal{E}^{21} + S_0 \mathcal{E}^0 + S_1 \mathcal{E}^1 + S_2 \mathcal{E}^2 + S_3 \mathcal{E}^3 + S_{123} \mathcal{E}^{123}. \quad (5)$$

В результате получим действительные матрицы 8×8 представления базисных векторов \mathcal{E}^I . (См. Раздел V 4).

Для алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_4$ будем вычислять структурные матрицы для особого порядка индексов, обобщающего предыдущий порядок индексов,

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124).$$

То есть, будем записывать слагаемые вектора в следующей последовательности

$$\tilde{S} = S_{32} \mathcal{E}^{32} + S_{13} \mathcal{E}^{13} + S_{21} \mathcal{E}^{21} + S_0 \mathcal{E}^0 + S_{42} \mathcal{E}^{42} + S_{14} \mathcal{E}^{14} + S_{1324} \mathcal{E}^{1324} + S_{34} \mathcal{E}^{34} + S_1 \mathcal{E}^1 + S_2 \mathcal{E}^2 + S_3 \mathcal{E}^3 + S_{123} \mathcal{E}^{123} + S_{134} \mathcal{E}^{134} + S_{234} \mathcal{E}^{234} + S_4 \mathcal{E}^4 + S_{124} \mathcal{E}^{124}.$$

В результате получим действительные матрицы 16×16 представления базисных векторов \mathcal{E}^I . (См. Раздел V 4).

Помимо действительного представления будем использовать *комплексное* и *кватернионное* представления базисных векторов алгебры Клиффорда, удобные в силу своей компактности.

2. Комплексное представление ковариантной алгебры Клиффорда.

1. подалгебра $\tilde{\mathbb{C}}_3$.

Остановимся на вопросе о представлении произведения алгебр Клиффорда. Алгебру Клиффорда $\tilde{\mathbb{C}}_n$ можно записать в виде произведения $\tilde{\mathbb{C}}_m \times \tilde{\mathbb{C}}_{(n-m)}$. И затем представить алгебру $\tilde{\mathbb{C}}_n$ как алгебру $\tilde{\mathbb{C}}_m$ над полем гиперчисел $\tilde{\mathbb{C}}_{(n-m)}$. Например вектор $\tilde{S} = S_I \mathcal{E}^I$ алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_3$ можно записать в следующем виде:

$$\tilde{S} = \mathcal{E}^{13} \circ (S_{32} \mathcal{E}^{21} + S_{13} \mathcal{E}^0) + \mathcal{E}^0 \circ (S_{21} \mathcal{E}^{21} + S_0 \mathcal{E}^0) + \mathcal{E}^2 \circ (S_1 \mathcal{E}^{21} + S_2 \mathcal{E}^0) + \mathcal{E}^{123} \circ (S_3 \mathcal{E}^{21} + S_{123} \mathcal{E}^0). \quad (6)$$

Эта запись соответствует записи алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_3$ в виде произведения $\tilde{\mathbb{C}}_2 \times \tilde{\mathbb{C}}_1$. Базисными векторами алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_2$ являются

$$\mathcal{E}^{13}, \quad \mathcal{E}^0, \quad \mathcal{E}^2, \quad \mathcal{E}^{123};$$

*Приведенный порядок индексов оправдан тем, что для него структурные матрицы алгебры Клиффорда представлены матрицами Дирака (см. далее). С математической точки зрения порядок индексов несуществен вследствие аддитивности сложения компонент вектора, но с фи-

зической точки зрения указанному порядку индексов нужно придавать определенное значение.

базисными векторами алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_1$ являются

$$\mathcal{E}^{21}, \quad \mathcal{E}^0.$$

Пространство $\tilde{\mathbb{C}}_1$ можно рассматривать как пространство комплексных чисел. Для этого базисному вектору \mathcal{E}^{21} алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_1$ поставим в соответствие мнимую единицу i с обратным знаком*, имея в виду, что $\text{sign } \mathcal{E}^{21} = -1$, а базисному вектору \mathcal{E}^0 алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_1$ поставим в соответствие действительную единицу. В результате получим вектор алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_3$ в комплексном представлении

$$\begin{aligned} \tilde{S} = & \mathcal{E}^{13} \circ (-S_{32} i + S_{13}) + \mathcal{E}^0 \circ (-S_{21} i + S_0) \\ & + \mathcal{E}^2 \circ (-S_1 i + S_2) + \mathcal{E}^{123} \circ (-S_3 i + S_{123}). \end{aligned} \quad (7)$$

Комплексное представление дается матрицами 4×4 , в которых блоки заменены базисными единицами 1 и i (см. Раздел V 4).

2. алгебра $\tilde{\mathbb{C}}_4$.

Комплексное представление основано на следующем разложении вектора:

$$\begin{aligned} \tilde{S} = & \mathcal{E}^{13} \circ (S_{32} \mathcal{E}^{21} + S_{13} \mathcal{E}^0) + \mathcal{E}^0 \circ (S_{21} \mathcal{E}^{21} + S_0 \mathcal{E}^0) \\ & + \mathcal{E}^{14} \circ (S_{42} \mathcal{E}^{21} + S_{14} \mathcal{E}^0) + \mathcal{E}^{34} \circ (S_{1324} \mathcal{E}^{21} + S_{34} \mathcal{E}^0) \\ & + \mathcal{E}^2 \circ (S_1 \mathcal{E}^{21} + S_2 \mathcal{E}^0) + \mathcal{E}^{123} \circ (S_3 \mathcal{E}^{21} + S_{123} \mathcal{E}^0) \\ & + \mathcal{E}^{234} \circ (S_{134} \mathcal{E}^{21} + S_{234} \mathcal{E}^0) + \mathcal{E}^{124} \circ (S_4 \mathcal{E}^{21} + S_{124} \mathcal{E}^0). \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_4$ в виде произведения $\tilde{\mathbb{C}}_3 \times \tilde{\mathbb{C}}_1$ (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_3$ являются

$$\mathcal{E}^{13}, \mathcal{E}^0, \mathcal{E}^{14}, \mathcal{E}^{34}, \mathcal{E}^2, \mathcal{E}^{123}, \mathcal{E}^{234}, \mathcal{E}^{124};$$

базисными векторами алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_1$ являются

$$\mathcal{E}^{21}, \quad \mathcal{E}^0.$$

Заменяя базисный вектор \mathcal{E}^{21} мнимой единицей с обратным знаком $(-i)$, а базисный вектор \mathcal{E}^0 действительной единицей, получим вектор алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_4$ в комплексном представлении

$$\begin{aligned} \tilde{S} = & \mathcal{E}^{13} \circ (-S_{32} i + S_{13}) + \mathcal{E}^0 \circ (-S_{21} i + S_0) \\ & + \mathcal{E}^{14} \circ (-S_{42} i + S_{14}) + \mathcal{E}^{34} \circ (-S_{1324} i + S_{34}) \\ & + \mathcal{E}^2 \circ (-S_1 i + S_2) + \mathcal{E}^{123} \circ (-S_3 i + S_{123}) \\ & + \mathcal{E}^{234} \circ (-S_{134} i + S_{234}) + \mathcal{E}^{124} \circ (-S_4 i + S_{124}). \end{aligned}$$

*Этот выбор найдет обоснование в разделе VIC.

Комплексное представление базисных векторов дается структурными матрицами 8×8 , в которых соответствующие блоки заменены базисными единицами 1 и i (см. Раздел V 4).

Сделаем замечание, на котором остановимся в дальнейшем. Отметим особенность базисного вектора \mathcal{E}^{21} . Он играет ключевую роль в организации комплексного представления. Именно этому вектору ставится в соответствие отрицательная мнимая единица. Имея в виду это соответствие, назовем базисный вектор \mathcal{E}^{21} *основным*. Однако, с алгебраической точки зрения направления \mathcal{E}^{13} и \mathcal{E}^{32} эквивалентны направлению \mathcal{E}^{21} и также могут быть приняты за основное. Для того, чтобы отличить эти случаи от предыдущего, будем обозначать мнимую единицу через j , если за основное направление принят вектор \mathcal{E}^{13} , и обозначать мнимую единицу через k , если за основное направление принят вектор \mathcal{E}^{32} .

3. Кватернионное представление ковариантной алгебры Клиффорда.

1. подалгебра $\tilde{\mathbb{C}}_3$.

Кватернионное[†] представление базисных векторов основано на следующем разложении вектора

$$\begin{aligned} \tilde{S} = & (S_{32} \mathcal{E}^{32} + S_{13} \mathcal{E}^{13} + S_{21} \mathcal{E}^{21} + S_0 \mathcal{E}^0) \circ \mathcal{E}^0 \\ & + (S_1 \mathcal{E}^{32} + S_2 \mathcal{E}^{13} + S_3 \mathcal{E}^{21} + S_{123} \mathcal{E}^0) \circ \mathcal{E}^{123}. \end{aligned} \quad (8)$$

Эта запись соответствует записи алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_3$ в виде произведения $\tilde{\mathbb{C}}_1 \times \tilde{\mathbb{C}}_2$. Базисными векторами алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_1$ являются $\mathcal{E}^0, \mathcal{E}^{123}$, базисными векторами алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_2$ являются $\mathcal{E}^{32}, \mathcal{E}^{13}, \mathcal{E}^{21}, \mathcal{E}^0$.

Записи алгебры Клиффорда $\tilde{\mathbb{C}}_3$ в виде произведения $\tilde{\mathbb{C}}_1 \times \tilde{\mathbb{C}}_2$ соответствует представление базисных векторов алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_3$ в пространстве подалгебры $\tilde{\mathbb{C}}_1$ над полем гиперчисел, составляющих алгебру $\tilde{\mathbb{C}}_2$.

[†]Напомним, что кватернионы это числа вида

$$\alpha_0 \cdot q^0 + \alpha_1 \cdot q^1 + \alpha_2 \cdot q^2 + \alpha_3 \cdot q^3,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – действительные числа, а q^0, q^1, q^2, q^3 – базисные кватернионы, для которых выполняются следующие правила умножения:

$$\begin{aligned} q^0 \circ q^0 &= q^0, & q^i \circ q^i &= -q^0, \\ q^0 \circ q^i &= q^i \circ q^0 = q^i, & (i = 1, 2, 3), \\ q^1 \circ q^2 &= -q^2 \circ q^1 = q^3, \\ q^2 \circ q^3 &= -q^3 \circ q^2 = q^1, \\ q^3 \circ q^1 &= -q^1 \circ q^3 = q^2. \end{aligned}$$

Причем базисные гиперчисла изоморфны базисным векторам $\mathcal{E}^{32}, \mathcal{E}^{13}, \mathcal{E}^{21}, \mathcal{E}^0$, которые могут рассматриваться как кватернионы, так как

$$\text{sign } \mathcal{E}^{32} = \text{sign } \mathcal{E}^{13} = \text{sign } \mathcal{E}^{21} = -1, \text{sign } \mathcal{E}^0 = 1.$$

Для базисных кватернионов используем соответственно следующие обозначения *

$$-i \cdot \sigma^1, \quad -i \cdot \sigma^2, \quad -i \cdot \sigma^3, \quad 1.$$

Заменяя базисные векторы $\mathcal{E}^{32}, \mathcal{E}^{13}, \mathcal{E}^{21}, \mathcal{E}^0$ кватернионами, получим вектор алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_3$ в кватернионном представлении

$$\tilde{S} = (-S_{32} \cdot i \sigma^1 - S_{13} \cdot i \sigma^2 - S_{21} \cdot i \sigma^3 + S_0) \circ \mathcal{E}^0 + (-S_1 \cdot i \sigma^1 - S_2 \cdot i \sigma^2 - S_3 \cdot i \sigma^3 + S_{123}) \circ \mathcal{E}^{123}. \quad (9)$$

Кватернионное представление базисных векторов дается структурными матрицами 2×2 , в которых соответствующие блоки заменены $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ (см. Раздел V 4).

2. алгебра $\tilde{\mathbb{C}}_4$.

Кватернионное представление базисных векторов основано на разложении вектора

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= (S_{32} \mathcal{E}^{32} + S_{13} \mathcal{E}^{13} + S_{21} \mathcal{E}^{21} + S_0 \mathcal{E}^0) \circ \mathcal{E}^0 \\ &+ (S_{42} \mathcal{E}^{32} + S_{14} \mathcal{E}^{13} + S_{1324} \mathcal{E}^{21} + S_{34} \mathcal{E}^0) \circ \mathcal{E}^{34} \\ &+ (S_1 \mathcal{E}^{32} + S_2 \mathcal{E}^{13} + S_3 \mathcal{E}^{21} + S_{123} \mathcal{E}^0) \circ \mathcal{E}^{123} \\ &+ (S_{134} \mathcal{E}^{32} + S_{234} \mathcal{E}^{13} + S_4 \mathcal{E}^{21} + S_{124} \mathcal{E}^0) \circ \mathcal{E}^{124}. \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_4$ в виде произведения $\tilde{\mathbb{C}}_2 \times \tilde{\mathbb{C}}_2$. Базисными векторами одной алгебры \mathbb{C}_2 являются $\mathcal{E}^0, \mathcal{E}^{34}, \mathcal{E}^{123}, \mathcal{E}^{124}$; базисными векторами другой алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_2$ являются $\mathcal{E}^{32}, \mathcal{E}^{13}, \mathcal{E}^{21}, \mathcal{E}^0$. Как и прежде, заменяя базисные векторы $\mathcal{E}^{32}, \mathcal{E}^{13}, \mathcal{E}^{21}, (\mathcal{E}^0)$ кватернионами, получим вектор алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_4$ в кватернионном представлении

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= (-S_{32} \cdot i \sigma^1 - S_{13} \cdot i \sigma^2 - S_{21} \cdot i \sigma^3 + S_0) \circ \mathcal{E}^0 \\ &+ (-S_{42} \cdot i \sigma^1 - S_{14} \cdot i \sigma^2 - S_{1324} \cdot i \sigma^3 + S_{34}) \circ \mathcal{E}^{34} \\ &+ (-S_1 \cdot i \sigma^1 - S_2 \cdot i \sigma^2 - S_3 \cdot i \sigma^3 + S_{123}) \circ \mathcal{E}^{123} \\ &+ (-S_{134} \cdot i \sigma^1 - S_{234} \cdot i \sigma^2 - S_4 \cdot i \sigma^3 + S_{124}) \circ \mathcal{E}^{124}. \end{aligned}$$

Кватернионное представление базисных векторов дается структурными матрицами 4×4 , в которых соответствующие блоки заменены $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ (см. Раздел V 4).

*Этот выбор найдет обоснование в разделе VIB.

4. Структурные матрицы ковариантной алгебры Клиффорда.

Приведем структурные матрицы алгебры Клиффорда, которые реализуют регулярное представление базисных векторов:

$$\mathcal{E}^I \sim C^{IK}_L.$$

При преобразовании матриц C^{IK}_L от действительного представления к комплексному использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

что равносильно замене действительных матриц 2×2 вида

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

на комплексные числа.

При преобразовании матриц C^{IK}_L от комплексного представления к кватернионному использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ представляют собой *матрицы Паули* (с той разницей, что по соображениям симметрии в качестве σ^3 взята матрица с противоположным знаком).

1. Подалгебра $\tilde{\mathbb{C}}_3$

$$\mathcal{E}^0 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \end{array} = 1 \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 2 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \end{array} = 1 \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

$$\mathcal{E}^1 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{bmatrix} & & & & & & & -1 \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & -1 \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{bmatrix} \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 2 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} & \begin{bmatrix} & & & -1 \\ & & & -1 \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} & \begin{bmatrix} & -\sigma^1 \\ \sigma^1 & \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

$$\mathcal{E}^2 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{bmatrix} & & & & & & & -1 \\ & & & & & & 1 & -1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{bmatrix} \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 2 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} & \begin{bmatrix} & & & i \\ & & & -i \\ & & 1 & \\ i & & & \end{bmatrix} \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} & \begin{bmatrix} & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{E}^3 \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline & 1 \\ \hline -1 & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 2 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline & 1 \\ \hline -1 & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \\ \\ = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline & -\sigma^3 \\ \hline \sigma^3 & \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{E}^{21} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 32 \quad 13 \quad 21 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline -1 & -1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ 1 \\ \end{array} \end{array} \end{array} = (-i) \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & \\ \hline 1 & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \end{array} \end{array} = (-i) \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \sigma^3 & \\ \hline & \sigma^3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\mathcal{E}^{13} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} 32 \quad 13 \quad 21 \quad 0 \\ -1 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \end{array} \end{array} \\
= (-i) \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ -i \\ i \end{array} & \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \end{array} \\
= (-i) \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ \sigma^2 \\ \sigma^2 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \end{array}
\end{array}$$

[illegible]

$$\mathcal{E}^{123} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 32 & 13 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ \\ -1 \\ \\ -1 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ 1 \\ \\ \\ -1 \end{array} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ 123 \end{array} \end{array} = 1 \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ -1 \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ \\ -1 \end{array} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 123 \end{array} \\ 0 \\ 123 \end{array} \end{array} = 1 \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ \\ -1 \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ 1 \end{array} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 123 \end{array} \\ 0 \\ 123 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{E}^0 \sim \\
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 13 \\ 21 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 42 \\ 14 \\ 34 \\ 1324 \end{array} & \begin{array}{c} 14 \\ 34 \\ 1324 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & & & \\
 \begin{array}{c} 42 \\ 14 \\ 34 \\ 1324 \end{array} & & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & & \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & & & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \\
 \begin{array}{c} 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \end{array} & & & & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 124 \end{array} & & & &
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 = \quad I \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \end{array} \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 = \quad I \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \end{array} \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\mathcal{E}^1 \sim \\
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
32 & 13 & 0 & 42 \\
13 & 21 & 0 & 14 \\
21 & 42 & 13 & 24 \\
0 & 1 & 2 & 3 \\
42 & 13 & 23 & 14 \\
14 & 13 & 24 & 12 \\
13 & 24 & 12 & 34 \\
34 & 1 & 2 & 3 \\
1 & 1 & 2 & 3 \\
2 & 1 & 2 & 3 \\
3 & 1 & 2 & 3 \\
123 & -1 & 1 & 1 \\
134 & 1 & -1 & 1 \\
234 & 1 & -1 & 1 \\
4 & 1 & -1 & 1 \\
124 & -1 & 1 & 1
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

[illegible]

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
32 & 13 & 21 & 0 \\
42 & 14 & 34 & 1 \\
1324 & 2 & 3 & 123 \\
234 & 4 & 124 &
\end{array} \\
\mathcal{E}^{21} \sim \begin{array}{|c|c|c|c|}
| | | | |
| --- | --- | --- | --- |
| 32 13 21 0 -1 1 | 42 14 34 1 2 3 123 134 234 4 124 | 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 -1 1 | 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 -1 1 |

\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\mathcal{E}^{234} \sim \\
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
32 & 13 & 0 & 42 \\
21 & 21 & 0 & 1324 \\
0 & 14 & 34 & 1 \\
42 & 2 & 3 & 123 \\
14 & 134 & 234 & 124 \\
34 & 1 & 2 & 3 \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 1 & 1 & 1 \\
123 & 1 & 1 & 1 \\
134 & 1 & 1 & 1 \\
234 & 1 & 1 & 1 \\
4 & 1 & 1 & 1 \\
124 & 1 & 1 & 1
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

$$= 1 \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 13 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ 0 & 14 & 2 & 134 & 1 \end{array} & \begin{array}{cc} 13 & 0 \\ 14 & 14 \\ 34 & 34 \\ 2 & 2 \\ 123 & 123 \\ 234 & 234 \\ 124 & 124 \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$= 1 \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 0 & 34 & 124 \\ 0 & 123 & 124 \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 34 & 34 \\ 123 & 123 \\ 124 & 124 \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\mathcal{E}^{1324} \sim \\
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
32 & 13 & 0 & 42 \\
21 & 21 & 0 & 1324 \\
0 & 14 & 34 & 1 \\
42 & 2 & 3 & 123 \\
14 & 134 & 234 & 124 \\
34 & 1 & 2 & 3 \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 1 & 1 & 1 \\
123 & 1 & 1 & 1 \\
134 & 1 & 1 & 1 \\
234 & 1 & 1 & 1 \\
4 & 1 & 1 & 1 \\
124 & 1 & 1 & 1
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

$$= i \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 13 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ 0 & 14 & 2 & 134 & 1 \end{array} & \begin{array}{cc} 13 & 0 \\ 14 & 14 \\ 34 & 34 \\ 2 & 2 \\ 123 & 123 \\ 234 & 234 \\ 124 & 124 \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$= i \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 0 & 34 & 124 \\ 0 & 123 & 124 \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 34 & 34 \\ 123 & 123 \\ 124 & 124 \end{array} \end{array} \end{array}$$

VI. СЖАТОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОВАРИАНТНОЙ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА.

Итак, мы получили следующее. Структурные матрицы ковариантной алгебры Клиффорда $\tilde{\mathbb{C}}_3$ в комплексном представлении совпадают с 8 матрицами Дирака $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^{21}, \gamma^{13}, \gamma^{32}, \gamma^{123}$. Кроме того, для алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_4$ мы получили 16 структурных

матриц, близких по духу к матрицам Дирака, но отличных от них прежде всего размерностью. Так в комплексном представлении это матрицы 8×8 . Необходимо отметить, что получить все 16 матриц Дирака, используя наш подход, то есть исходя из регулярного представления базисных векторов алгебры Клиффорда $\tilde{\mathbb{C}}_4$, невозможно принципиально. Тем не менее, для того, чтобы понять место матриц Дирака в квантовой теории, исходя из нашего подхода, необходимо найти путь к их вычислению. Этот путь таков. Допустим, что имеет место вырождение компонент вектора действия. Иначе говоря, будем полагать, что часть компонент вектора действия не отличима от другой части компонент. Такое вырождение назовем *сжатием*.

Ему соответствует регулярное представление базисных векторов алгебры Клиффорда $\tilde{\mathbb{C}}_n$ в ее подалгебре $\tilde{\mathbb{C}}_{n-k}$, где $k < n$. Такое представление будем называть *сжатым*. Далее оно будет использовано для вывода матриц Дирака и Паули. Матрицы представления в этом случае назовем *сжатыми*.

Для примера рассмотрим сжатое представление базисных векторов алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_n$ в ее подалгебре $\tilde{\mathbb{C}}_{n-1}$.

Разобьем базисные векторы \mathcal{E}^I алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_n$ на две группы \mathcal{E}^{I_1} и \mathcal{E}^{I_2} с одинаковым числом векторов так, чтобы векторы \mathcal{E}^{I_1} образовывали алгебру $\tilde{\mathbb{C}}_{n-1}$. В силу симметрий алгебры Клиффорда соотношения (4) принимают вид

$$\mathcal{E}^{I_1} \circ \mathcal{E}^{K_1} = C^{I_1 K_1}_{L_1} \cdot \mathcal{E}^{L_1}, \quad (10)$$

$$\mathcal{E}^{I_2} \circ \mathcal{E}^{K_1} = C^{I_2 K_1}_{L_2} \cdot \mathcal{E}^{L_2}, \quad (11)$$

$$\mathcal{E}^{I_1} \circ \mathcal{E}^{K_2} = C^{I_1 K_2}_{L_2} \cdot \mathcal{E}^{L_2},$$

$$\mathcal{E}^{I_2} \circ \mathcal{E}^{K_2} = C^{I_2 K_2}_{L_1} \cdot \mathcal{E}^{L_1}.$$

Будем полагать, что приближенно при вычислении матриц представления базисных векторов алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_n$ в алгебре $\tilde{\mathbb{C}}_{n-1}$ базисные векторы \mathcal{E}^{L_2} в правой части уравнения (11) можно заменить на базисные векторы \mathcal{E}^{L_1} с помощью соотношения

$$\mathcal{E}^{L_2} = P^{L_2}_{L_1} \cdot \mathcal{E}^{L_1}, \quad (12)$$

где $P^{L_2}_{L_1}$ есть матрица соответствий. Тогда соотношение (11) принимает вид:

$$\mathcal{E}^{I_2} \circ \mathcal{E}^{K_1} = C^{I_2 K_1}_{L_2} \cdot P^{L_2}_{L_1} \cdot \mathcal{E}^{L_1}. \quad (13)$$

Соотношения (10) и (13) позволяют получить матрицы представления базисных векторов алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_n$ в ее подалгебре $\tilde{\mathbb{C}}_{n-1}$, причем базисные векторы подалгебры $\tilde{\mathbb{C}}_{n-1}$ представляются точно, а остальные базисные векторы – приближенно.

Аналогичным образом можно рассмотреть сжатое представление базисных векторов алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_n$ в ее подалгебре $\tilde{\mathbb{C}}_{n-k}$, где $k < n$.

1. Первое сжатое представление. Матрицы Дирака.

Рассмотрим сжатое представление базисных векторов алгебры \mathbb{C}_4 в ее подалгебре \mathbb{C}_3 , построенной на базисных векторах $\mathcal{E}^{32}, \mathcal{E}^{13}, \mathcal{E}^{21}, \mathcal{E}^0, \mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2, \mathcal{E}^3, \mathcal{E}^{123}$. Для этого положим, что при вычислении структурных матриц по формуле (13) соотношение (12) определяется тем, что базисные векторы с индексами

$$42, 14, 1324, 34, 134, 234, 4, 124$$

заменяются на базисные векторы с индексами

$$32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123$$

соответственно. Тогда размерность матриц базисных векторов алгебры \mathbb{C}_4 понижается вдвое и равна 8×8 в действительном представлении, 4×4 в комплексном представлении и 2×2 в кватернионном представлении. В результате будем иметь

$$\mathcal{E}^0 \sim \begin{array}{c} 14 \quad 34 \quad 234 \quad 124 \\ 42 \quad 1324 \quad 134 \quad 4 \\ 32 \quad 13 \quad 21 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 32 & 1 & & \\ 13 & & 1 & \\ 21 & & & 1 \\ 0 & & & \\ 1 & & & 1 \\ 2 & & & \\ 3 & & & \\ 123 & & & 1 \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 13 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 2 & & & 1 \\ 123 & & & \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ 123 & & 1 & \end{array} \end{array}$$

$$\mathcal{E}^1 \sim \begin{array}{c} 14 \quad 34 \quad 234 \quad 124 \\ 42 \quad 1324 \quad 134 \quad 4 \\ 32 \quad 13 \quad 21 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 32 & & & -1 \\ 13 & & & 1 \\ 21 & & 1 & -1 \\ 0 & & 1 & \\ 1 & & -1 & \\ 2 & & 1 & \\ 3 & & -1 & \\ 123 & & -1 & \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 13 & & -1 & \\ 0 & & 1 & \\ 2 & & & 1 \\ 123 & & & \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 0 & & -\sigma^1 & \\ 123 & & \sigma^1 & \end{array} \end{array}$$

$$\mathcal{E}^2 \sim \begin{array}{c} 14 \quad 34 \quad 234 \quad 124 \\ 42 \quad 1324 \quad 134 \quad 4 \\ 32 \quad 13 \quad 21 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 32 & & & -1 \\ 13 & & & 1 \\ 21 & & 1 & -1 \\ 0 & & 1 & \\ 1 & & 1 & \\ 2 & & -1 & \\ 3 & & -1 & \\ 123 & & -1 & \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 13 & & i & \\ 0 & & -i & \\ 2 & & & 1 \\ 123 & & & \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 0 & & -\sigma^2 & \\ 123 & & \sigma^2 & \end{array} \end{array}$$

$$\mathcal{E}^3 \sim \begin{array}{c} 14 \quad 34 \quad 234 \quad 124 \\ 42 \quad 1324 \quad 134 \quad 4 \\ 32 \quad 13 \quad 21 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 32 & & 1 & \\ 13 & & -1 & -1 \\ 21 & & & 1 \\ 0 & & 1 & \\ 1 & & -1 & \\ 2 & & 1 & \\ 3 & & 1 & \\ 123 & & -1 & \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 13 & & 1 & -1 \\ 0 & & -1 & \\ 2 & & & 1 \\ 123 & & & \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 0 & & -\sigma^3 & \\ 123 & & \sigma^3 & \end{array} \end{array}$$

$$\mathcal{E}^4 \sim \begin{array}{c} 14 \quad 34 \quad 234 \quad 124 \\ 42 \quad 1324 \quad 134 \quad 4 \\ 32 \quad 13 \quad 21 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 32 & & & -1 \\ 13 & & 1 & \\ 21 & & & -1 \\ 0 & & & 1 \\ 1 & & -1 & \\ 2 & & & \\ 3 & & -1 & \\ 123 & & 1 & \end{array} \end{array} = -i \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 13 & & 1 & \\ 0 & & & 1 \\ 2 & & 1 & \\ 123 & & & \end{array} \end{array} = -i \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 0 & & 1 & \\ 123 & & 1 & \end{array} \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{21} \sim \begin{array}{c} 14 \quad 34 \quad 234 \quad 124 \\ 42 \quad 1324 \quad 134 \quad 4 \\ 32 \quad 13 \quad 21 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 32 & 1 & & \\ 13 & -1 & & \\ 21 & & -1 & \\ 0 & & 1 & \\ 1 & & & 1 \\ 2 & & -1 & -1 \\ 3 & & & \\ 123 & & & 1 \end{array} \end{array} = -i \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 13 & -1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 2 & & & -1 \\ 123 & & & 1 \end{array} \end{array} = -i \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 0 & & \sigma^3 & \\ 123 & & \sigma^3 & \end{array} \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{13} \sim \begin{array}{c} 14 \quad 34 \quad 234 \quad 124 \\ 42 \quad 1324 \quad 134 \quad 4 \\ 32 \quad 13 \quad 21 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 32 & & -1 & \\ 13 & & & -1 \\ 21 & & 1 & \\ 0 & & 1 & \\ 1 & & & -1 \\ 2 & & & -1 \\ 3 & & 1 & \\ 123 & & & 1 \end{array} \end{array} = -i \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 13 & & -i & \\ 0 & & i & \\ 2 & & & -i \\ 123 & & & \end{array} \end{array} = -i \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 0 & & \sigma^2 & \\ 123 & & \sigma^2 & \end{array} \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{32} \sim \begin{array}{c} 14 \quad 34 \quad 234 \quad 124 \\ 42 \quad 1324 \quad 134 \quad 4 \\ 32 \quad 13 \quad 21 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 32 & & -1 & \\ 13 & & 1 & \\ 21 & & -1 & \\ 0 & & 1 & \\ 1 & & & -1 \\ 2 & & & 1 \\ 3 & & -1 & \\ 123 & & 1 & \end{array} \end{array} = -i \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 13 & & 1 & \\ 0 & & & 1 \\ 2 & & 1 & \\ 123 & & & \end{array} \end{array} = -i \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 0 & & \sigma^1 & \\ 123 & & \sigma^1 & \end{array} \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{14} \sim \begin{array}{c} 14 \quad 34 \quad 234 \quad 124 \\ 42 \quad 1324 \quad 134 \quad 4 \\ 32 \quad 13 \quad 21 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 32 & & 1 & \\ 13 & & 1 & \\ 21 & & 1 & \\ 0 & & & -1 \\ 1 & & & -1 \\ 2 & & -1 & -1 \\ 3 & & -1 & \\ 123 & & -1 & \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 13 & & 1 & \\ 0 & & & -1 \\ 2 & & & -1 \\ 123 & & & \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 0 & & \sigma^1 & \\ 123 & & -\sigma^1 & \end{array} \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{42} \sim \begin{array}{c} 14 \quad 34 \quad 234 \quad 124 \\ 42 \quad 1324 \quad 134 \quad 4 \\ 32 \quad 13 \quad 21 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 32 & & 1 & \\ 13 & & -1 & \\ 21 & & -1 & \\ 0 & & 1 & \\ 1 & & & -1 \\ 2 & & & 1 \\ 3 & & 1 & \\ 123 & & -1 & \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 13 & & i & \\ 0 & & -i & \\ 2 & & & i \\ 123 & & & \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ \begin{array}{cc|cc} 0 & & -\sigma^2 & \\ 123 & & \sigma^2 & \end{array} \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{34} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 14 & 34 & 234 & 124 \\ 42 & 1324 & 134 & 4 & \\ 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|cc|} \hline 32 & -1 & & \\ 13 & & -1 & \\ 21 & & & 1 \\ 0 & & & & 1 \\ \hline 1 & & & 1 & \\ 2 & & & & 1 & -1 \\ 3 & & & & & -1 \\ \hline 123 & & & & & & -1 \end{array} \end{array} = 1 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 2 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|} \hline -1 & \\ \hline 1 & \\ \hline & -1 \end{array} \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccc} 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|} \hline \sigma^3 & \\ \hline & -\sigma^3 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{123} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 14 & 34 & 234 & 124 \\ 42 & 1324 & 134 & 4 & \\ 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|cc|} \hline 32 & & & 1 \\ 13 & & & & 1 \\ 21 & & & & & 1 \\ 0 & & & & & & 1 \\ \hline 1 & -1 & & \\ 2 & & -1 & \\ 3 & & & -1 \\ \hline 123 & & & -1 \end{array} \end{array} = 1 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 2 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|} \hline & 1 \\ \hline -1 & 1 \\ \hline & -1 \end{array} \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccc} 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|} \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline -1 & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{124} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 14 & 34 & 234 & 124 \\ 42 & 1324 & 134 & 4 & \\ 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|cc|} \hline 32 & & & -1 \\ 13 & & & & -1 \\ 21 & & & & & 1 \\ 0 & & & & & & 1 \\ \hline 1 & -1 & & \\ 2 & & -1 & \\ 3 & & & 1 \\ \hline 123 & & & 1 \end{array} \end{array} = 1 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 2 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|} \hline & -1 \\ \hline -1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array} \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccc} 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|} \hline & \sigma^3 \\ \hline \sigma^3 & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{134} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 14 & 34 & 234 & 124 \\ 42 & 1324 & 134 & 4 & \\ 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|cc|} \hline 32 & & & & 1 \\ 13 & & & & & -1 \\ 21 & & & & & & -1 \\ 0 & & & & & & 1 \\ \hline 1 & & & 1 & \\ 2 & & -1 & \\ 3 & & & -1 \\ \hline 123 & & & 1 \end{array} \end{array} = 1 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 2 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|} \hline & i \\ \hline & -i \\ \hline -i & \end{array} \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccc} 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|} \hline & \sigma^2 \\ \hline \sigma^2 & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \end{array} = (-1) \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|} \hline & \sigma^2 \\ \hline \sigma^2 & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{234} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 14 & 34 & 234 & 124 \\ 42 & 1324 & 134 & 4 & \\ 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|cc|} \hline 32 & & & 1 \\ 13 & & & & 1 \\ 21 & & & & & 1 \\ 0 & & & & & & 1 \\ \hline 1 & & & 1 & \\ 2 & & & & 1 \\ 3 & & & & & 1 \\ \hline 123 & & & 1 \end{array} \end{array} = 1 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 2 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline 1 & \end{array} \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccc} 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|} \hline & \sigma^1 \\ \hline \sigma^1 & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{1324} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 14 & 34 & 234 & 124 \\ 42 & 1324 & 134 & 4 & \\ 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|cc|} \hline 32 & -1 & & \\ 13 & 1 & & -1 \\ 21 & & & 1 \\ 0 & & & & 1 \\ \hline 1 & & & 1 & \\ 2 & & & & -1 \\ 3 & & & & & 1 \\ \hline 123 & & & & & -1 \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 2 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|} \hline -1 & \\ \hline -1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccc} 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|} \hline & -1 \\ \hline -1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \end{array}$$

Эти матрицы и есть матрицы Дирака, приведенные в разделе 1V Лекции 2.

Таким образом, мы вычислили матрицы Дирака и установили, что они есть структурные матрицы алгебры Клиффорда $\tilde{\mathbb{C}}_4$ для сжатого представления этой алгебры в алгебре $\tilde{\mathbb{C}}_3$. Такое представление будем называть *первым сжатым* и обозначать

$$R_1 : \tilde{\mathbb{C}}_4 \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}_3 \{\mathcal{E}^{32}, \mathcal{E}^{13}, \mathcal{E}^{21}, \mathcal{E}^0, \mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2, \mathcal{E}^3, \mathcal{E}^{123}\}.$$

2. Второе сжатое представление. Матрицы Паули.

Рассмотрим сжатое представление

$$R_2 : \tilde{\mathbb{C}}_4 \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}_2 \{\mathcal{E}^{32}, \mathcal{E}^{13}, \mathcal{E}^{21}, \mathcal{E}^0\}.$$

которое будем называть *вторым сжатым* представлением. Для этого положим, что при вычислении структурных матриц по формуле (13) соотношение (12) определяется тем, что базисные векторы с индексами $(42, 14, 1324, 34)$, $(134, 234, 4, 124)$ и $(1, 2, 3, 123)$ заменяются на базисные векторы с индексами $(32, 13, 21, 0)$ соответственно. Тогда размерность матриц представления базисных векторов алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_4$ понижается вдвое в сравнении с первым сжатым представлением и равна 4×4 в действительном представлении, 2×2 в комплексном представлении и 1×1 в кватернионном представлении.

Ограничимся тем, что приведем матрицы регулярного представления образующих базисных векторов алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_4$ в алгебре $\tilde{\mathbb{C}}_2$. Имеем

$$\mathcal{E}^1 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 & 123 \\ 32 & 13 & 21 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|} \hline 32 & -1 \\ \hline 13 & 1 \\ \hline 21 & -1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \end{array} = (-i) \begin{array}{|cc|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \end{array} = (-i) \sigma^1$$

$$\mathcal{E}^2 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 & 123 \\ 32 & 13 & 21 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|} \hline 32 & -1 \\ \hline 13 & -1 \\ \hline 21 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \end{array} = (-i) \begin{array}{|cc|} \hline & -i \\ \hline i & \end{array} = (-i) \sigma^2$$

$$\mathcal{E}^3 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 & 123 \\ 32 & 13 & 21 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|} \hline 32 & 1 \\ \hline 13 & -1 \\ \hline 21 & -1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \end{array} = (-i) \begin{array}{|cc|} \hline -1 & \\ \hline & 1 \end{array} = (-i) \sigma^3$$

$$\mathcal{E}^4 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 134 & 234 & 4 & 124 \\ 32 & 13 & 21 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|} \hline 32 & -1 \\ \hline 13 & 1 \\ \hline 21 & -1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \end{array} = (-i) \begin{array}{|cc|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \end{array} = (-i) \mathbb{1}$$

Таким образом, базисные векторы $\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2, \mathcal{E}^3$, представлены в алгебре $\tilde{\mathbb{C}}_2$ матрицами Паули. В результате для базисных векторов алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_4$ получим

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{32} &\sim -i\sigma^1, & \mathcal{E}^{42} &\sim -1\sigma^2, \\ \mathcal{E}^{13} &\sim -i\sigma^2, & \mathcal{E}^{14} &\sim 1\sigma^1, \\ \mathcal{E}^{21} &\sim -i\sigma^3, & \mathcal{E}^{1324} &\sim -i\mathbb{1}, \\ \mathcal{E}^0 &\sim 1\mathbb{1}, & \mathcal{E}^{34} &\sim 1\sigma^3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^1 &\sim -i\sigma^1, & \mathcal{E}^{134} &\sim -1\sigma^2, \\ \mathcal{E}^2 &\sim -i\sigma^2, & \mathcal{E}^{234} &\sim 1\sigma^1, \\ \mathcal{E}^3 &\sim -i\sigma^3, & \mathcal{E}^4 &\sim -i\mathbb{1}, \\ \mathcal{E}^{123} &\sim 1\mathbb{1}, & \mathcal{E}^{124} &\sim 1\sigma_3.\end{aligned}$$

В рассматриваемом представлении только базисные векторы $\mathcal{E}^{32}, \mathcal{E}^{13}, \mathcal{E}^{21}, \mathcal{E}^0$ представлены точно. Соотношения

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{32} &\sim -i\sigma^1, \\ \mathcal{E}^{13} &\sim -i\sigma^2, \\ \mathcal{E}^{21} &\sim -i\sigma^3, \\ \mathcal{E}^0 &\sim 1\mathbb{1}\end{aligned}$$

можно рассматривать как соответствие между указанными базисными векторами и кватернионами. Именно такое соответствие было постулировано в разделе VC.

3. Третье сжатое представление.

Рассмотрим сжатое представление

$$R_3 : \tilde{\mathbb{C}}_4 \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}_1 \{\mathcal{E}^{21}, \mathcal{E}^0\}$$

которое будем называть *третьим сжатым* представлением. Для этого положим, что соотношение (12) определяется тем, что базисные векторы с индексами (42, 14), (1324, 34), (134, 234), (4, 124), (1, 2), (3, 123), (32, 13) заменяются на векторы с индексами (21, 0) соответственно. Тогда размерность матриц базисных векторов алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_4$ понижается вдвое в сравнении с вторым сжатым представлением и равна 2×2 в действительном представлении, 1×1 в комплексном представлении. В результате для базисных векторов алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_4$ получим

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{32} &\sim -i, & \mathcal{E}^1 &\sim -i, & \mathcal{E}^{42} &\sim -i, & \mathcal{E}^{134} &\sim -i, \\ \mathcal{E}^{13} &\sim 1, & \mathcal{E}^2 &\sim 1, & \mathcal{E}^{14} &\sim 1, & \mathcal{E}^{234} &\sim 1, \\ \mathcal{E}^{21} &\sim -i, & \mathcal{E}^3 &\sim -i, & \mathcal{E}^{1324} &\sim -i, & \mathcal{E}^4 &\sim -i, \\ \mathcal{E}^0 &\sim 1, & \mathcal{E}^{123} &\sim 1, & \mathcal{E}^{34} &\sim 1, & \mathcal{E}^{124} &\sim 1\end{aligned}$$

В рассматриваемом представлении вектор \mathcal{E}^{21} и только он представляется точно мнимой единицей. В этом и заключается смысл мнимой единицы, вводимой в квантовой механике Шредингера.

Полученное здесь соотношение

$$\mathcal{E}^{21} \sim -i$$

подтверждает соответствие, постулированное в разделе VB.

VII. ВЫВОДЫ

- 8 структурных матриц ковариантной алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_3$ в комплексном представлении совпадают с 8 матрицами Дирака $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^{21}, \gamma^{13}, \gamma^{32}, \gamma^{123}$.

- К мнимой единице, комплексным числам мы приходим, вводя блочные матрицы

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}.$$

Таким образом, загадочная роль мнимой единицы, комплексных величин и пространства Гильберта в квантовой механике объясняется правилами умножения базисных векторов в алгебре действия.

- 16 структурных матриц ковариантной алгебры Клиффорда $\tilde{\mathbb{C}}_4$ обобщают 16 матриц Дирака, отличаясь от них прежде всего размерностью. Так в комплексном представлении это матрицы 8×8 , в то время как матрицы Дирака имеют размерность 4×4 .
- Если предположить вырождение части компонент вектора ковариантной алгебры действия $\tilde{\mathbb{C}}_4$, то структурные матрицы алгебры $\tilde{\mathbb{C}}_4$ сводятся к полному набору матриц Дирака.
- Усиление вырождения компонент вектора сначала приводит к структурным матрицам в виде матриц Паули, а затем к действительной и мнимой единицам.