Лекция 15. Гипотетические фундаментальные частицы

А. А. Кецарис
(31 июля 2005 г.)

Для черных лептонов, цветных (синих, желтых, красных) кваркино и черных лептино – гипотетических фундаментальных частиц, введенных в предыдущей Лекции, – получены уравнения релятивистской квантовой механики. При переходе к стандартному представлению оказалось, что черные лептоны и синие кваркино представлены двухкомпонентными частицами верхнего и нижнего уровней. Черные лептино, желтые и красные кваркино представлены каждое четырехкомпонентной частицей.

I. ВВЕДЕНИЕ

В своей классификации фундаментальных частиц мы опирались на диаграммы Юнга. Сейчас трудно сказать насколько надежна эта опора. Но так как пока ничего другого у нас нет, то будем пользоваться тем, что есть. Обращение к диаграммам Юнга указало на существование целого ряда гипотетических частиц

- Лептонов второго рода*. При этом известные лептоны обозначены как лептоны *белого* цвета. А гипотетические лептоны второго рода обозначены как лептоны *черного* цвета.
- Кваркино – частицы суперсимметричные кваркам. Эти частицы, также как и кварки, являются трехцветными.
- Лептино – частицы суперсимметричные лептонам. По нашему предположению эти частицы, также как и лептоны, являются двухцветными.

Зная алгебру каждой из указанных частиц, мы имеем возможность записать уравнения квантовой механики для этих частиц. А на основании анализа уравнений, которым подчиняются гипотетические частицы, мы, возможно, со временем ответим на вопрос: каковы свойства гипотетических частиц в отличие от известных. Например, чем черные лептоны отличаются от известных белых лептонов и так далее.

Поэтому в настоящей Лекции мы рассмотрим алгебры гипотетических фундаментальных частиц и запишем уравнения релятивистской квантовой механики для этих частиц в свободном состоянии.

Предварительно напомним, что, согласно Лекции 1, если действие некоторого объекта является алгеброй, то такому объекту присущи квантовые явления, а уравнения структуры этой алгебры можно рассматривать как квантовые постулаты. Квантовые постулаты для произвольной алгебры действия были записаны следующим образом

$$\partial_M \psi^L = \frac{1}{S_0}\, C^L{}_{KI} \cdot p^I{}_M \cdot \psi^K \,. \tag{1}$$

Здесь ∂_M – оператор дифференцирования по обобщенной координате, $p^I{}_M$ – координаты обобщенного импульса, $C^L{}_{KI}$ – структурные постоянные алгебры действия, S_0 – действительная постоянная величина, имеющая размерность действия. В последующих Лекциях мы ввели алгебру Клиффорда как алгебру действия и связали ее с лептонами. При этом постоянную величину S_0 мы отождествили с постоянной Планка. Если бы нам удалось найти несколько алгебр действия, то мы имели бы несколько объектов, подчиняющихся квантовым явлениям разного типа.

Теперь мы ввели новый объект – гипотетическую частицу, которой мы сопоставим свою алгебру действия и алгебру пространства-времени. И согласно предыдущему эта частица подчиняется своей квантовой теории. Уравнения (1) будут квантовыми постулатами для гипотетической частицы, если в них положить постоянные $C^L{}_{KI}$ равными структурным постоянным алгебры этой частицы и установить значение S_0. При этом возникает вопрос: нужно ли связывать постоянную Планка только с лептонами и соответственно с алгеброй Клиффорда, а для алгебры гипотетической частицы вводить другую постоянную с размерностью действия, или постоянная Планка является универсальной? A priori ответить на этот вопрос нельзя. Поэтому далее будем полагать, что значение физической постоянной S_0 различно для каждого из видов частиц – лептонов, кварков, кваркино и лептино. Для лептонов S_0 это постоянная Планка $\hbar$. Для кварков мы ввели свою постоянную действия, значение которой предстоит установить, и обозначили ее через q. Для лептино мы ввели свою постоянную действия, значение которой предстоит установить, и обозначили ее через l. Для кваркино также введем

---

*В связи с гипотезой второго рода лептонов, например второго электрона, интересно следующее замечание Дж. Дж. Томсона. "...у нас нет доказательств того, что, подобно различным родам атомов существуют и различные типы электронов. Но возможно, что наряду с наблюдаемым типом электронов имеются и другие, значительно менее устойчивые и потому почти совсем не наблюдаемые." (УФН, 1928, т. 8, вып. 5, с. 571) свою постоянную действия, значение которой предстоит установить, и обозначим ее через p.

Аналогично Разделу II Лекции 9 придадим соотношению (1) форму уравнения Дирака. Для этого умножим его обе части на структурные постоянные $C^{MN}{}_{L}$. Получим

$$C^{MN}{}_{L} \cdot \partial_M \psi^L(x) = \frac{1}{S_0}\, C^{MN}{}_{L} \cdot C^{L}{}_{KI} \cdot p^{I}{}_{M} \cdot \psi^K . \quad (2)$$

С нашей точки зрения это уравнение и есть уравнение релятивистской квантовой механики для фундаментальной частицы в самом общем виде. Далее, повторяя рассуждения Раздела II Лекции 9, запишем это уравнение при следующих ограничениях: дифференцирование выполняется только по координатам образующего пространства и условии, что в первом сжатом представлении коэффициент при волновой функции в правой части принимает вид

$$-\frac{\mathrm{m}_d\, c}{S_0} .$$

Здесь m_d есть масса нижней частицы. В результате получим следующее уравнение

$$C^{mN}{}_{L} \cdot \partial_m \psi^L(x) = \frac{1}{S_0}\,(C^{L}{}_{K0}\, p^{0}{}_{0} + C^{L}{}_{K34}\, p^{34}{}_{0}) \cdot \psi^K . \quad (3)$$

При этом имеет место условие *

$$p^{0}{}_{0} + p^{34}{}_{0} = -\mathrm{m}_d\, c . \quad (4)$$

Разобьем величину $\mathrm{m}_d\, c$ между импульсами $p^{0}{}_{0}$ и $p^{34}{}_{0}$ в некоторой пропорции. Для этого положим

$$p^{0}{}_{0} = -\frac{\mathrm{m}_d\, c}{2}\,\alpha , \qquad p^{34}{}_{0} = -\frac{\mathrm{m}_d\, c}{2}\,\beta .$$

Из (4) имеем

$$\alpha + \beta = 2 . \quad (5)$$

Кроме того, положим

$$\beta - \alpha = 2\,\frac{\mathrm{m}_u}{\mathrm{m}_d} . \quad (6)$$

Здесь m_u масса верхней частицы. После подстановки импульсов получим релятивистское уравнение квантовой механики для свободной фундаментальной частицы

$$C^{mN}{}_{L} \cdot \partial_m \psi^L(x) = -\frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\, S_0}\,(\alpha \cdot C^{N}{}_{K0} + \beta \cdot C^{N}{}_{K34}) \cdot \psi^K . \quad (7)$$

*См. Раздел II Лекции 9.

Понятно, что здесь $C^{N}{}_{K0} = \delta^{N}{}_{K}$ в отличие от $C^{N}{}_{K34}$. Таким образом, для того, чтобы записать уравнение квантовой механики для конкретной фундаментальной частицы, необходимо знать следующие структурные матрицы

$$C^{4N}{}_{L}\,, \quad C^{1N}{}_{L}\,, \quad C^{2N}{}_{L}\,, \quad C^{3N}{}_{L}\,, \quad C^{N}{}_{K34}$$

алгебры этой частицы.

Имея в виду сказанное, перейдем к алгебрам гипотетических фундаментальных частиц и составлению уравнений квантовой механики для этих частиц.

II. ЧЕРНЫЕ ЛЕПТОНЫ

Алгебра черных лептонов определяется диаграммой Юнга

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Из нее следуют перестановочные соотношения

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}\,,$$
$$\mathbf{14} = \mathbf{41}\,, \quad \mathbf{24} = -\mathbf{42}\,, \quad \mathbf{34} = -\mathbf{43}\,.$$

Отсюда пространство действия черных лептонов $\mathbb{C}_b$ есть множество векторов вида

$$\begin{gathered}\psi = \mathfrak{e}_0\, \psi^0 + \mathfrak{e}_i\, \psi^i + \mathfrak{e}_{[ab]}\, \psi^{[ba]} \\ +\mathfrak{e}_{\langle 14\rangle}\, \psi^{\langle 41\rangle} + \mathfrak{e}_{[42]}\, \psi^{[24]} + \mathfrak{e}_{[34]}\, \psi^{[43]} + \\ +\mathfrak{e}_{[123]}\, \psi^{[321]} + \mathfrak{e}_{(124)_2}\, \psi^{(421)_2} + \mathfrak{e}_{(134)_2}\, \psi^{(431)_2} \\ +\mathfrak{e}_{[234]}\, \psi^{[432]} + \mathfrak{e}_{(1324)_2}\, \psi^{(4231)_2} .\end{gathered}$$

Если пространство с базисными векторами $\mathfrak{e}_{i_p \ldots i_1}$ обозначить $(\mathbb{C}_b)^p$ то пространство алгебры кварков $\mathbb{C}_b$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{C}_b = \mathbb{C}^0 + \mathbb{C}^1 + (\mathbb{C}_b)^2 + (\mathbb{C}_b)^3 + (\mathbb{C}_b)^4 .$$

Далее, как и прежде, базисные векторы $\mathfrak{e}$ по отношению к алгебре лептонов будем обозначать ε.

1. *iab*-представление алгебры черных лептонов $\mathbb{C}_b$

iab-представление основано на следующем разложении вектора:

$$\begin{aligned}\psi = {}& \varepsilon_{13} \circ (\varepsilon_{21}\, \psi^{32} + \varepsilon_0\, \psi^{13}) + \varepsilon_0 \circ (\varepsilon_{21}\, \psi^{21} + \varepsilon_0\, \psi^0) + \\ & \varepsilon_{14} \circ (\varepsilon_{21}\, \psi^{42} + \varepsilon_0\, \psi^{14}) + \varepsilon_{34} \circ (\varepsilon_{21}\, \psi^{1324} + \varepsilon_0\, \psi^{34}) + \\ & \varepsilon_2 \circ (\varepsilon_{21}\, \psi^1 + \varepsilon_0\, \psi^2) + \varepsilon_{123} \circ (\varepsilon_{21}\, \psi^3 + \varepsilon_0\, \psi^{123}) + \\ & \varepsilon_{234} \circ (\varepsilon_{21}\, \psi^{134} + \varepsilon_0\, \psi^{234}) + \varepsilon_{124} \circ (\varepsilon_{21}\, \psi^4 + \varepsilon_0\, \psi^{124}) .\end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{C}_4$ в виде произведения $\mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_1$ (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_3$ являются

$$\varepsilon_{13}\,,\quad \varepsilon_0\,,\quad \varepsilon_{14}\,,\quad \varepsilon_{34}\,,\quad \varepsilon_2\,,\quad \varepsilon_{123}\,,\quad \varepsilon_{234}\,,\quad \varepsilon_{124}\,;$$

базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_1$ являются

$$\varepsilon_{21}\,,\quad \varepsilon_0\,.$$

Как и прежде поставим в соответствие базисному вектору ε_{21} алгебры $\mathbb{C}_1$ мнимую единицу, а базисному вектору ε_0 действительную единицу. В результате получим вектор алгебры $\mathbb{C}_4$ в iab-представлении имеет вид

$$\begin{aligned}\psi = {} & \varepsilon_{13}\circ(i\,\psi^{32}+\psi^{13})+\varepsilon_0\circ(i\,\psi^{21}+\psi^0)+\\ & \varepsilon_{14}\circ(i\,\psi^{42}+\psi^{14})+\varepsilon_{34}\circ(i\,\psi^{1324}+\psi^{34})+\\ & \varepsilon_2\circ(i\,\psi^1+\psi^2)+\varepsilon_{123}\circ(i\,\psi^3+\psi^{123})+\\ & \varepsilon_{234}\circ(i\,\psi^{134}+\psi^{234})+\varepsilon_{124}\circ(i\,\psi^4+\psi^{124})\,.\end{aligned}$$

Таким образом, в iab-представлении координаты (компоненты) вектора являются комплексными числами. Введем для них обозначение

$$\begin{array}{ll}\boldsymbol{\psi}^{13} = i\,\psi^{32}+\psi^{13}\,, & \boldsymbol{\psi}^{0} = i\,\psi^{21}+\psi^{0}\,,\\ \boldsymbol{\psi}^{14} = i\,\psi^{42}+\psi^{14}\,, & \boldsymbol{\psi}^{34} = i\,\psi^{1324}+\psi^{34}\,,\\ \boldsymbol{\psi}^{2} = i\,\psi^{1}+\psi^{2}\,, & \boldsymbol{\psi}^{123} = i\,\psi^{3}+\psi^{123}\,,\\ \boldsymbol{\psi}^{234} = i\,\psi^{134}+\psi^{234}\,, & \boldsymbol{\psi}^{124} = i\,\psi^{4}+\psi^{124}\,.\end{array}\tag{8}$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$\begin{aligned}\psi = {} & \varepsilon_{13}\,\boldsymbol{\psi}^{13}+\varepsilon_0\,\boldsymbol{\psi}^0+\varepsilon_{14}\,\boldsymbol{\psi}^{14}+\varepsilon_{34}\,\boldsymbol{\psi}^{34}+\\ & \varepsilon_2\,\boldsymbol{\psi}^2+\varepsilon_{123}\,\boldsymbol{\psi}^{123}+\varepsilon_{234}\,\boldsymbol{\psi}^{234}+\varepsilon_{124}\,\boldsymbol{\psi}^{124}\,.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что в iab-представлении вектор ψ проецируется на направления

$$\varepsilon_{13},\quad \varepsilon_0,\quad \varepsilon_{14},\quad \varepsilon_{34},\quad \varepsilon_2,\quad \varepsilon_{123},\quad \varepsilon_{234},\quad \varepsilon_{124}\,.$$

В iab-представлении структурные матрицы имеют размерность 8×8 (см. Приложение к Лекции).

2. IAB-представление алгебры черных лептонов $\mathbb{C}_b$

IAB-представление алгебры $\mathbb{C}_4$ основано на разложении вектора:

$$\begin{aligned}\psi = {} & (\varepsilon_{32}\,\psi^{32}+\varepsilon_{13}\,\psi^{13}+\varepsilon_{21}\,\psi^{21}+\varepsilon_0\,\psi^0)\circ\varepsilon_0+\\ & (\varepsilon_{32}\,\psi^{42}+\varepsilon_{13}\,\psi^{14}+\varepsilon_{21}\,\psi^{1324}+\varepsilon_0\,\psi^{34})\circ\varepsilon_{34}+\\ & (\varepsilon_{32}\,\psi^{1}+\varepsilon_{13}\,\psi^{2}+\varepsilon_{21}\,\psi^{3}+\varepsilon_0\,\psi^{123})\circ\varepsilon_{123}+\\ & (\varepsilon_{32}\,\psi^{134}+\varepsilon_{13}\,\psi^{234}+\varepsilon_{21}\,\psi^{4}+\varepsilon_0\,\psi^{124})\circ\varepsilon_{124}\,.\end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{C}_4$ в виде произведения $\mathbb{C}_2\times\mathbb{C}_2$. Базисными векторами одной алгебры $\mathbb{C}_2$ являются

$$\varepsilon_0\,,\quad \varepsilon_{34}\,,\quad \varepsilon_{123}\,,\quad \varepsilon_{124}\,;$$

базисными векторами другой алгебры $\mathbb{C}_2$ являются

$$\varepsilon_{32}\,,\quad \varepsilon_{13}\,,\quad \varepsilon_{21}\,,\quad \varepsilon_0\,.$$

Последнюю алгебру мы назвали IAB-алгеброй. Эта алгебра аналогична алгебре кватернионов. Для базисных единиц IAB-алгебры используем следующие обозначения

$$a\cdot I\,,\quad b\cdot I\,,\quad i\cdot\mathbb{1}\,,\quad \mathbb{1}\,.$$

Заменим базисные векторы ε_{32}, ε_{13}, ε_{21}, ε_0 приведенными гиперчислами в соответствии

$$\begin{aligned}\varepsilon_{32} &\sim a\,I\,,\\ \varepsilon_{13} &\sim b\,I\,,\\ \varepsilon_{21} &\sim i\,\mathbb{1}\,,\\ \varepsilon_0 &\sim 1\,\mathbb{1}\,.\end{aligned}$$

Получим вектор алгебры $\mathbb{C}_4$ в IAB-представлении

$$\begin{aligned}\psi = {} & (a\cdot I\,\psi^{32}+b\cdot I\,\psi^{13}+i\cdot\mathbb{1}\,\psi^{21}+\mathbb{1}\,\psi^0)\circ\varepsilon_0+\\ & (a\cdot I\,\psi^{42}+b\cdot I\,\psi^{14}+i\cdot\mathbb{1}\,\psi^{1324}+\mathbb{1}\,\psi^{34})\circ\varepsilon_{34}+\\ & (a\cdot I\,\psi^{1}+b\cdot I\,\psi^{2}+i\cdot\mathbb{1}\,\psi^{3}+\mathbb{1}\,\psi^{123})\circ\varepsilon_{123}+\\ & (a\cdot I\,\psi^{134}+b\cdot I\,\psi^{234}+i\cdot\mathbb{1}\,\psi^{4}+\mathbb{1}\,\psi^{124})\circ\varepsilon_{124}\,.\end{aligned}$$

Таким образом, в IAB-представлении координаты (компоненты) вектора являются гиперчислами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned}\Psi^0 &= a\,I\,\psi^{32}+b\,I\;\psi^{13}+i\,\mathbb{1}\,\psi^{21}+\mathbb{1}\,\psi^0\,,\\ \Psi^{34} &= a\,I\,\psi^{42}+b\,I\;\psi^{14}+i\,\mathbb{1}\,\psi^{1324}+\mathbb{1}\,\psi^{34}\,,\\ \Psi^{123} &= a\,I\,\psi^{1}+b\,B\,\psi^{2}+i\,\mathbb{1}\,\psi^{3}+\mathbb{1}\,\psi^{123}\,,\\ \Psi^{124} &= a\,I\,\psi^{134}+b\,I\;\psi^{234}+i\,\mathbb{1}\,\psi^{4}+\mathbb{1}\,\psi^{124}\,.\end{aligned}\tag{9}$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$\psi = \Psi^0\,\varepsilon_0+\Psi^{34}\,\varepsilon_{34}+\Psi^{123}\,\varepsilon_{123}+\Psi^{124}\,\varepsilon_{124}\,.$$

Отсюда видно, что в IAB-представлении вектор ψ проецируется на направления ε_0, ε_{34}, ε_{123}, ε_{124}.

В IAB-представлении структурные матрицы имеют размерность 4×4 (см. Приложение к Лекции).

3. Базисные векторы и их произведения

Укажем базисные векторы алгебры черных лептонов $\mathbb{C}_b$ и правила умножения, которым они подчиняются.

- ε_0 – базисный вектор скалярной части вектора. Для ε_0 имеет место правило умножения

$$\varepsilon_0\circ\varepsilon_0 = \varepsilon_0\,.$$

- Образующие векторы ε_i, где индекс i пробегает значения от 1 до 4, есть базисные векторы пространства-времени СТО. Число векторов ε_i равно четырем. Для них имеют место правила умножения

$$\varepsilon_i \circ \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \circ \varepsilon_i = \varepsilon_i \,.$$

$$\varepsilon_i \circ \varepsilon_i = \operatorname{sign} \varepsilon_i \,,$$

где

$$\operatorname{sign} \varepsilon_1 = \operatorname{sign} \varepsilon_2 = \operatorname{sign} \varepsilon_3 = - \operatorname{sign} \varepsilon_4 = \varepsilon_0 \,.$$

- Векторы

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_k \circ \varepsilon_i \,.$$

Здесь $i \neq k$. Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6 \,.$$

В соответствии с Разделом IV Лекции 14 этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей (перестановочные соотношения)

$$\varepsilon_{21} = -\varepsilon_{21} \,, \quad \varepsilon_{13} = -\varepsilon_{31} \,, \quad \varepsilon_{32} = -\varepsilon_{23} \,,$$
$$\varepsilon_{14} = \varepsilon_{41} \,, \quad \varepsilon_{24} = -\varepsilon_{42} \,, \quad \varepsilon_{34} = -\varepsilon_{43} \,.$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и перестановочных соотношений. В частности, имеем

$$\varepsilon_{21} \circ \varepsilon_{21} = -\varepsilon_0 \,, \qquad \varepsilon_{42} \circ \varepsilon_{42} = \varepsilon_0 \,,$$
$$\varepsilon_{32} \circ \varepsilon_{32} = -\varepsilon_0 \,, \qquad \varepsilon_{14} \circ \varepsilon_{14} = -\varepsilon_0 \,,$$
$$\varepsilon_{13} \circ \varepsilon_{13} = -\varepsilon_0 \,, \qquad \varepsilon_{34} \circ \varepsilon_{34} = \varepsilon_0 \,.$$

- Векторы

$$\varepsilon_{ikl} = \varepsilon_l \circ \varepsilon_k \circ \varepsilon_i \,.$$

Здесь $i \neq k \,, i \neq l \,, k \neq l$. Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4 \,.$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из условия ассоциативности и перестановочных соотношений

$$\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{213} = \varepsilon_{231} = -\varepsilon_{321} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{132} \,,$$
$$\varepsilon_{124} = -\varepsilon_{214} = -\varepsilon_{241} = \varepsilon_{421} = -\varepsilon_{412} = -\varepsilon_{142} \,,$$
$$\varepsilon_{134} = -\varepsilon_{314} = -\varepsilon_{341} = \varepsilon_{431} = -\varepsilon_{413} = -\varepsilon_{143} \,,$$
$$\varepsilon_{234} = -\varepsilon_{324} = \varepsilon_{342} = -\varepsilon_{432} = \varepsilon_{423} = -\varepsilon_{243} \,.$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\varepsilon_{123} \circ \varepsilon_{123} = -\varepsilon_0 \,, \qquad \varepsilon_{124} \circ \varepsilon_{124} = -\varepsilon_0 \,,$$
$$\varepsilon_{134} \circ \varepsilon_{134} = -\varepsilon_0 \,, \qquad \varepsilon_{234} \circ \varepsilon_{234} = \varepsilon_0 \,.$$

- Вектор

$$\varepsilon_{1324} = \varepsilon_1 \circ \varepsilon_3 \circ \varepsilon_2 \circ \varepsilon_2 \,.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из перестановочных соотношений

$$\varepsilon_{1234} = -\varepsilon_{2134} = \varepsilon_{2314} = -\varepsilon_{3214} =$$
$$\varepsilon_{3124} = -\varepsilon_{1324} = -\varepsilon_{1243} = \varepsilon_{2143} =$$
$$\varepsilon_{2413} = -\varepsilon_{4213} = \varepsilon_{4123} = \varepsilon_{1423} =$$
$$\varepsilon_{1342} = -\varepsilon_{3142} = -\varepsilon_{3412} = \varepsilon_{4312} =$$
$$-\varepsilon_{4132} = -\varepsilon_{1432} = \varepsilon_{2341} = -\varepsilon_{3241} =$$
$$\varepsilon_{3421} = -\varepsilon_{4321} = \varepsilon_{4231} = -\varepsilon_{2431} \,.$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\varepsilon_{1324} \circ \varepsilon_{1324} = \varepsilon_0 \,.$$

4. Структурные матрицы алгебры черных лептонов $\mathbb{C}_b$

Используя Приложение к настоящей Лекции, приведем структурные матрицы алгебры $\mathbb{C}_b$, необходимые для построения уравнения релятивистской квантовой механики для свободных черных лептонов.

$$C^{4N}{}_L = a \begin{array}{|cc|cc|c} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{34} & \multicolumn{1}{c}{123} & \multicolumn{1}{c}{124} & \\ \hline & & & B & 0 \\ & & B & & 34 \\ \hline & \text{-}B & & & 123 \\ \text{-}B & & & & 124 \\ \hline \end{array} \,, \qquad C^{1N}{}_L = i \begin{array}{|cc|cc|c} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{34} & \multicolumn{1}{c}{123} & \multicolumn{1}{c}{124} & \\ \hline & & \text{-}A & & 0 \\ & & & \text{-}A & 34 \\ \hline A & & & & 123 \\ & A & & & 124 \\ \hline \end{array} \,,$$

$$C^{2N}{}_L = 1 \begin{array}{|cc|cc|c} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{34} & \multicolumn{1}{c}{123} & \multicolumn{1}{c}{124} & \\ \hline & & \text{-}I & & 0 \\ & & & \text{-}I & 34 \\ \hline I & & & & 123 \\ & I & & & 124 \\ \hline \end{array} \,, \qquad C^{3N}{}_L = i \begin{array}{|cc|cc|c} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{34} & \multicolumn{1}{c}{123} & \multicolumn{1}{c}{124} & \\ \hline & & \text{-}B & & 0 \\ & & & \text{-}B & 34 \\ \hline B & & & & 123 \\ & B & & & 124 \\ \hline \end{array} \,,$$

$$C^{N}{}_{K0} = 1 \begin{array}{|cc|cc|c} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{34} & \multicolumn{1}{c}{123} & \multicolumn{1}{c}{124} & \\ \hline \mathbb{1} & & & & 0 \\ & \mathbb{1} & & & 34 \\ \hline & & \mathbb{1} & & 123 \\ & & & \mathbb{1} & 124 \\ \hline \end{array} \,, \qquad C^{N}{}_{K34} = 1 \begin{array}{|cc|cc|c} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{34} & \multicolumn{1}{c}{123} & \multicolumn{1}{c}{124} & \\ \hline & \mathbb{1} & & & 0 \\ \mathbb{1} & & & & 34 \\ \hline & & & \mathbb{1} & 123 \\ & & \mathbb{1} & & 124 \\ \hline \end{array} \,.$$

Далее, используя приведенные матрицы, запишем уравнение релятивистской квантовой механики для черных лептонов.

5. Уравнение релятивистской квантовой механики для черных лептонов

Уравнение релятивистской квантовой механики для свободных черных лептонов получим, подставив в уравнение (7) вышеприведенные структурные матрицы. Для действительного регулярного представления алгебры черных лептонов $\mathbb{C}_b$ компоненты волновой функции $\psi^K(x)$ представляют собой шестнадцать действительных функций. В iab-представлении волновая функция содержит восемь компонент вида (8). И в IAB-представлении компонентами волновой функции являются четыре IAB-функции вида (9). Приведем уравнения квантовой механики по отношению к IAB-компонентам волновой функции черных лептонов:

$$\left(a \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & & B \\ & & B & \\ \hline & -B & & \\ -B & & & \\ \hline \end{array}\; \partial_4 + i \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & -A & \\ & & & -A \\ \hline A & & & \\ & A & & \\ \hline \end{array}\; \partial_1 + \right.$$

$$\left. \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & -I & \\ & & & -I \\ \hline I & & & \\ & I & & \\ \hline \end{array}\; \partial_2 + i \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & -B & \\ & & & -B \\ \hline B & & & \\ & B & & \\ \hline \end{array}\; \partial_3 \right) \left\| \begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} \right\|$$

$$= -\frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\,\hbar} \begin{array}{|cc|cc|} \hline \alpha & \beta & & \\ \beta & \alpha & & \\ \hline & & \alpha & \beta \\ & & \beta & \alpha \\ \hline \end{array} \left\| \begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} \right\|$$

Или

$$\begin{aligned} -a\,B\,\partial_4\Psi^{124} \quad & +(i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\Psi^{123} \\ & = \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\,\hbar}\,(\alpha\cdot\Psi^0 + \beta\cdot\Psi^{34})\,, \\ -a\,B\,\partial_4\Psi^{123} \quad & +(i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\Psi^{124} \\ & = \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\,\hbar}\,(\beta\cdot\Psi^0 + \alpha\cdot\Psi^{34})\,, \\ a\,B\,\partial_4\Psi^{34} \quad & -(i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\Psi^{0} \\ & = \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\,\hbar}\,(\alpha\cdot\Psi^{123} + \beta\cdot\Psi^{124})\,, \\ a\,B\,\partial_4\Psi^{0} \quad & -(i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\Psi^{34} \\ & = \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\,\hbar}\,(\beta\cdot\Psi^{123} + \alpha\cdot\Psi^{124})\,. \end{aligned} \tag{10}$$

6. Стандартное представление уравнения квантовой механики для черных лептонов.

Преобразуем уравнения (10) следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым а третье с четвертым. Получим

$$\begin{aligned} -a\,B\,\partial_4\varphi_2 + (i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\,\varphi_2 &= \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\,\hbar}\,(\alpha+\beta)\,\varphi_1\,, \\ a\,B\,\partial_4\varphi_1 - (i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\,\varphi_1 &= \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\,\hbar}\,(\alpha+\beta)\,\varphi_2\,, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{34}$ и $\varphi_2 = \Psi^{123} + \Psi^{124}$.

Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$\begin{aligned} a\,B\,\partial_4\chi_2 + (i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\,\chi_2 &= \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\,\hbar}\,(\beta-\alpha)\,\chi_1\,, \\ -a\,B\,\partial_4\chi_1 - (i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\,\chi_1 &= \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\,\hbar}\,(\beta-\alpha)\,\chi_2\,, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\chi_1 = \Psi^{123} - \Psi^{124}$ и $\chi_2 = \Psi^0 - \Psi^{34}$.

Для лептонов мы полагаем (см. Лекцию 9)

$$\alpha = \beta = 1\,.$$

Поэтому получим следующие две системы уравнений

$$\begin{aligned} -a\,B\,\partial_4\varphi_2 + (i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\,\varphi_2 &= \frac{\mathrm{m}_d\, c}{\hbar}\varphi_1\,, \\ a\,B\,\partial_4\varphi_1 - (i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\,\varphi_1 &= \frac{\mathrm{m}_d\, c}{\hbar}\,\varphi_2 \end{aligned} \tag{13}$$

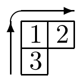
и

$$\begin{aligned} a\,B\,\partial_4\chi_2 + (i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\,\chi_2 &= 0\,, \\ -a\,B\,\partial_4\chi_1 - (i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\,\chi_1 &= 0\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Первая система относится к нижнему черному лептону (например, электрону). Вторая система относится к соответствующему верхнему черному лептону (например, электронному нейтрино) с массой, равной нулю. Из сравнения полученных уравнений с аналогичными уравнениями для белых лептонов (см. формулы (10), (11) Лекции 9) следует, что эти уравнения отличаются коэффициентами при производной по времени. Как указанное отличие отражается на движении разноцветных лептонов, доступном для экспериментальной проверки, предстоит выяснить.

III. КВАРКИНО

Пространственная часть волновой функции кваркино определена следующей диаграммой Юнга



Из нее следуют перестановочные соотношения для геометрических базисных векторов алгебры кваркино

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32}\,.$$

В результате пространственная часть волновой функции кваркино имеет вид

$$\psi = \mathfrak{e}_0\,\psi^0 + \mathfrak{e}_a\,\psi^a + \mathfrak{e}_{\langle 21\rangle}\,\psi^{\langle 12\rangle} + \mathfrak{e}_{[13]}\,\psi^{[31]} + \mathfrak{e}_{\langle 32\rangle}\,\psi^{\langle 23\rangle} + \\ + \mathfrak{e}_{(123)_3}\,\psi^{(321)_3}\,.$$

Волновая функция кваркино может быть представлена с помощью четырех компонент, каждая из которых является функцией над полем гиперчисел. Базисными единицами гиперчисел для кваркино являются

$$1 \cdot \mathbb{1}\,, \quad a \cdot B\,, \quad 1 \cdot I\,, \quad a \cdot A\,.$$

Далее базисные векторы $\mathfrak{e}$ по отношению к алгебре кваркино будем обозначать ρ.

1. iab-представление алгебры кваркино $\mathbb{Q}_4^*$

iab-представление основано на следующем разложении вектора:

$$\begin{aligned}\psi = {}&\rho_{13} \circ (\rho_{21}\,\psi^{32} + \rho_0\,\psi^{13}) + \rho_0 \circ (\rho_{21}\,\psi^{21} + \rho_0\,\psi^0) + \\ &\rho_{14} \circ (\rho_{21}\,\psi^{42} + \rho_0\,\psi^{14}) + \rho_{34} \circ (\rho_{21}\,\psi^{1324} + \rho_0\,\psi^{34}) + \\ &\rho_2 \circ (\rho_{21}\,\psi^1 + \rho_0\,\psi^2) + \rho_{123} \circ (\rho_{21}\,\psi^3 + \rho_0\,\psi^{123}) + \\ &\rho_{234} \circ (\rho_{21}\,\psi^{134} + \rho_0\,\psi^{234}) + \rho_{124} \circ (\rho_{21}\,\psi^4 + \rho_0\,\psi^{124})\,.\end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{Q}_4^*$ в виде произведения $\mathbb{Q}_3^* \times \mathbb{Q}_1^*$ (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры $\mathbb{Q}_3$ являются

$$\rho_{13}\,, \quad \rho_0\,, \quad \rho_{14}\,, \quad \rho_{34}\,, \quad \rho_2\,, \rho_{123}\,, \quad \rho_{234}\,, \quad \rho_{124}\,;$$

базисными векторами алгебры $\mathbb{Q}_1$ являются

$$\rho_{21}\,, \quad \rho_0\,.$$

Поставим в соответствие базисному вектору ρ_{21} алгебры $\mathbb{Q}_1^*$ a единицу, а базисному вектору ρ_0 действительную единицу. В результате получим вектор алгебры $\mathbb{Q}_4^*$ в iab-представлении имеет вид

$$\begin{aligned}\psi = {}&\rho_{13} \circ (a\,\psi^{32} + \psi^{13}) + \rho_0 \circ (a\,\psi^{21} + \psi^0) + \\ &\rho_{14} \circ (a\,\psi^{42} + \psi^{14}) + \rho_{34} \circ (a\,\psi^{1324} + \psi^{34}) + \\ &\rho_2 \circ (a\,\psi^1 + \psi^2) + \rho_{123} \circ (a\,\psi^3 + \psi^{123}) + \\ &\rho_{234} \circ (a\,\psi^{134} + \psi^{234}) + \rho_{124} \circ (a\,\psi^4 + \psi^{124})\,.\end{aligned}$$

Таким образом, в iab-представлении координаты (компоненты) вектора являются a-гиперчислами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\psi}^{13} = a\,\psi^{32} + \psi^{13}\,, && \boldsymbol{\psi}^{0} = a\,\psi^{21} + \psi^{0}\,,\\ &\boldsymbol{\psi}^{14} = a\,\psi^{42} + \psi^{14}\,, && \boldsymbol{\psi}^{34} = a\,\psi^{1324} + \psi^{34}\,,\\ &\boldsymbol{\psi}^{2} = a\,\psi^{1} + \psi^{2}\,, && \boldsymbol{\psi}^{123} = a\,\psi^{3} + \psi^{123}\,,\\ &\boldsymbol{\psi}^{234} = a\,\psi^{134} + \psi^{234}\,, && \boldsymbol{\psi}^{124} = a\,\psi^{4} + \psi^{124}\,.\end{aligned} \tag{15}$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$\begin{aligned}\psi = {}&\rho_{13}\,\boldsymbol{\psi}^{13} + \rho_0\,\boldsymbol{\psi}^0 + \rho_{14}\,\boldsymbol{\psi}^{14} + \rho_{34}\,\boldsymbol{\psi}^{34} + \\ &\rho_2\,\boldsymbol{\psi}^2 + \rho_{123}\,\boldsymbol{\psi}^{123} + \rho_{234}\,\boldsymbol{\psi}^{234} + \rho_{124}\,\boldsymbol{\psi}^{124}\,.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что в iab-представлении вектор ψ проецируется на направления ρ_{13}, ρ_0, ρ_{14}, ρ_{34}, ρ_2, ρ_{123}, ρ_{234}, ρ_{124}.

В iab-представлении структурные матрицы имеют размерность 8×8 (см. Приложение к Лекции).

2. IAB-представление алгебры кваркино $\mathbb{Q}_4^*$

IAB-представление алгебры $\mathbb{Q}_4^*$ основано на разложении вектора:

$$\begin{aligned}\psi = {}&(\rho_{32}\,\psi^{32} + \rho_{13}\,\psi^{13} + \rho_{21}\,\psi^{21} + \rho_0\,\psi^0) \circ \rho_0 + \\ &(\rho_{32}\,\psi^{42} + \rho_{13}\,\psi^{14} + \rho_{21}\,\psi^{1324} + \rho_0\,\psi^{34}) \circ \rho_{34} + \\ &(\rho_{32}\,\psi^{1} + \rho_{13}\,\psi^{2} + \rho_{21}\,\psi^{3} + \rho_0\,\psi^{123}) \circ \rho_{123} + \\ &(\rho_{32}\,\psi^{134} + \rho_{13}\,\psi^{234} + \rho_{21}\,\psi^{4} + \rho_0\,\psi^{124}) \circ \rho_{124}\,.\end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{Q}_4^*$ в виде произведения $\mathbb{Q}_2^* \times \mathbb{Q}_2^*$. Базисными векторами одной алгебры $\mathbb{Q}_2^*$ являются

$$\rho_0\,, \quad \rho_{34}\,, \quad \rho_{123}\,, \quad \rho_{124}\,;$$

базисными векторами другой алгебры $\mathbb{Q}_2^*$ являются

$$\rho_{32}\,, \quad \rho_{13}\,, \quad \rho_{21}\,, \quad \rho_0\,.$$

Последнюю алгебру мы назвали IAB-алгеброй. Эта алгебра аналогична алгебре кватернионов. Для базисных единиц IAB-алгебры используем следующие обозначения

$$a \cdot A\,, \quad 1 \cdot I\,, \quad a \cdot B\,, \quad 1 \cdot \mathbb{1}\,.$$

Заменим базисные векторы ρ_{32}, ρ_{13}, ρ_{21}, ρ_0 приведенными гиперчислами в соответствии

$$\begin{aligned}\rho_{32} &\sim a\,A\,,\\ \rho_{13} &\sim 1\,I\,,\\ \rho_{21} &\sim a\,B\,,\\ \rho_0 &\sim 1\,\mathbb{1}\,.\end{aligned}$$

Получим вектор алгебры $\mathbb{Q}_4^*$ в IAB-представлении

$$\begin{aligned}\psi = {}&(a \cdot A\,\psi^{32} + 1 \cdot I\,\psi^{13} + a \cdot B\,\psi^{21} + \mathbb{1}\,\psi^0) \circ \rho_0 + \\ &(a \cdot A\,\psi^{42} + 1 \cdot I\,\psi^{14} + a \cdot B\,\psi^{1324} + \mathbb{1}\,\psi^{34}) \circ \rho_{34} + \\ &(a \cdot A\,\psi^{1} + 1 \cdot I\,\psi^{2} + a \cdot B\,\psi^{3} + \mathbb{1}\,\psi^{123}) \circ \rho_{123} + \\ &(a \cdot A\,\psi^{134} + 1 \cdot I\,\psi^{234} + a \cdot B\,\psi^{4} + \mathbb{1}\,\psi^{124}) \circ \rho_{124}\,.\end{aligned}$$

Таким образом, в IAB-представлении координаты (компоненты) вектора являются гиперчислами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned}\Psi^0 &= a\,A\,\psi^{32} + 1\,I\,\psi^{13} + a\,B\,\psi^{21} + \mathbb{1}\,\psi^0\,,\\ \Psi^{34} &= a\,A\,\psi^{42} + 1\,I\,\psi^{14} + a\,B\,\psi^{1324} + \mathbb{1}\,\psi^{34}\,,\\ \Psi^{123} &= a\,A\,\psi^{1} + 1\,I\,\psi^{2} + a\,B\,\psi^{3} + \mathbb{1}\,\psi^{123}\,,\\ \Psi^{124} &= a\,A\,\psi^{134} + 1\,I\,\psi^{234} + a\,B\,\psi^{4} + \mathbb{1}\,\psi^{124}\,.\end{aligned} \tag{16}$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

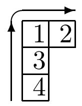
$$\psi = \Psi^0\,\rho_0 + \Psi^{34}\,\rho_{34} + \Psi^{123}\,\rho_{123} + \Psi^{124}\,\rho_{124}\,.$$

Отсюда видно, что в IAB-представлении вектор ψ проецируется на направления ρ_0, ρ_{34}, ρ_{123}, ρ_{124}.

В IAB-представлении структурные матрицы имеют размерность 4×4 (см. Приложение к Лекции).

3. Синие кваркино

Алгебра синих кваркино определяется диаграммой Юнга



Из нее следуют перестановочные соотношения

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32}\,,$$
$$\mathbf{14} = -\mathbf{41}\,, \quad \mathbf{24} = \mathbf{42}\,, \quad \mathbf{34} = -\mathbf{43}\,.$$

Отсюда пространство действия синих кваркино $\mathbb{Q}_b^*$ есть множество векторов вида

$$\psi = \mathfrak{e}_0\,\psi^0 + \mathfrak{e}_i\,\psi^i + \mathfrak{e}_{\langle 21\rangle}\,\psi^{\langle 12\rangle} + \mathfrak{e}_{[13]}\,\psi^{[31]} + \mathfrak{e}_{\langle 32\rangle}\,\psi^{\langle 23\rangle} +$$
$$+\mathfrak{e}_{[14]}\,\psi^{[41]} + \mathfrak{e}_{\langle 42\rangle}\,\psi^{\langle 24\rangle} + \mathfrak{e}_{[34]}\,\psi^{[43]} + \mathfrak{e}_{(123)_3}\,\psi^{(321)_3}$$
$$+\mathfrak{e}_{(124)_3}\,\psi^{(421)_3} + \mathfrak{e}_{[134]}\,\psi^{[431]} + \mathfrak{e}_{(234)_3s}\,\psi^{(432)_3} +$$
$$+\mathfrak{e}_{(1324)_6}\,\psi^{(4231)_6}\,.$$

Если пространство с базисными векторами $\mathfrak{e}_{i_p \ldots i_1}$ обозначить $(\mathbb{Q}_b^*)^p$ то пространство алгебры синих кваркино $\mathbb{Q}_b^*$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{Q}_b^* = \mathbb{Q}^0 + \mathbb{Q}^1 + (\mathbb{Q}_b^*)^2 + (\mathbb{Q}_b^*)^3 + (\mathbb{Q}_b^*)^4\,.$$

1. Базисные векторы и их произведения

Укажем базисные векторы алгебры $\mathbb{Q}_b^*$ и правила умножения, которым они подчиняются.

- ρ_0 – базисный вектор скалярной части вектора. Для ρ_0 имеет место правило умножения

$$\rho_0 \circ \rho_0 = \rho_0\,.$$

- Образующие векторы ρ_i, где индекс i пробегает значения от 1 до 4, есть базисные векторы пространства-времени СТО. Число векторов ρ_i равно четырем. Для них имеют место правила умножения

$$\rho_i \circ \rho_0 = \rho_0 \circ \rho_i = \rho_i\,.$$

$$\rho_i \circ \rho_i = \operatorname{sign} \rho_i\,,$$

где

$$\operatorname{sign} \rho_1 = \operatorname{sign} \rho_2 = \operatorname{sign} \rho_3 = -\operatorname{sign} \rho_4 = \rho_0\,.$$

- Векторы

$$\rho_{ik} = \rho_k \circ \rho_i\,.$$

Здесь $i \neq k$. Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6\,.$$

В соответствии с Разделом IV Лекции 14 для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей (перестановочные соотношения)

$$\rho_{21} = \rho_{21}\,, \quad \rho_{13} = -\rho_{31}\,, \quad \rho_{32} = \rho_{23}\,,$$
$$\rho_{14} = -\rho_{41}\,, \quad \rho_{24} = \rho_{42}\,, \quad \rho_{34} = -\rho_{43}\,.$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и перестановочных соотношений. В частности, имеем

$$\rho_{21} \circ \rho_{21} = \rho_0\,, \qquad \rho_{42} \circ \rho_{42} = -\rho_0\,,$$
$$\rho_{32} \circ \rho_{32} = \rho_0\,, \qquad \rho_{14} \circ \rho_{14} = \rho_0\,,$$
$$\rho_{13} \circ \rho_{13} = -\rho_0\,, \qquad \rho_{34} \circ \rho_{34} = \rho_0\,.$$

- Векторы

$$\rho_{ikl} = \rho_l \circ \rho_k \circ \rho_i\,.$$

Здесь $i \neq k\,, i \neq l\,, k \neq l$. Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4\,.$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из перестановочных соотношений

$$\rho_{123} = \rho_{213} = -\rho_{231} = -\rho_{321} = -\rho_{312} = \rho_{132}\,,$$
$$\rho_{124} = \rho_{214} = -\rho_{241} = -\rho_{421} = -\rho_{412} = \rho_{142}\,,$$
$$\rho_{134} = \rho_{314} = \rho_{341} = -\rho_{431} = \rho_{413} = -\rho_{143}\,,$$
$$\rho_{234} = \rho_{324} = \rho_{342} = -\rho_{432} = -\rho_{423} = -\rho_{243}\,.$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\rho_{123} \circ \rho_{123} = -\rho_0\,, \qquad \rho_{124} \circ \rho_{124} = \rho_0\,,$$
$$\rho_{134} \circ \rho_{134} = -\rho_0\,, \qquad \rho_{234} \circ \rho_{234} = \rho_0\,.$$

- Вектор

$$\rho_{1324} = \rho_1 \circ \rho_3 \circ \rho_2 \circ \rho_4 \,.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из перестановочных соотношений

$$\begin{gathered}\rho_{1234} = \rho_{2134} = -\rho_{2314} = -\rho_{3214} = \\ -\rho_{3124} = \rho_{1324} = -\rho_{1243} = -\rho_{2143} = \\ \rho_{2413} = \rho_{4213} = \rho_{4123} = -\rho_{1423} = \\ \rho_{1342} = -\rho_{3142} = \rho_{3412} = -\rho_{4312} = \\ \rho_{4132} = -\rho_{1432} = \rho_{2341} = \rho_{3241} = \\ \rho_{3421} = -\rho_{4321} = -\rho_{4231} = -\rho_{2431}\,.\end{gathered}$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\rho_{1324} \circ \rho_{1324} = \rho_0 \,.$$

2. Структурные матрицы алгебры синих кваркино $\mathbb{Q}_b^*$

Используя Приложение к настоящей Лекции, приведем структурные матрицы алгебры $\mathbb{Q}_b^*$, необходимые для построения уравнения релятивистской квантовой механики для свободных синих кваркино

$$C^{4N}{}_L = -i \begin{array}{c|cc|cc|c} & 0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline & & & & \mathbb{1} & 0 \\ & & & \mathbb{1} & & 34 \\ \hline & & \mathbb{1} & & & 123 \\ & \mathbb{1} & & & & 124 \\ \hline \end{array} \,, \quad C^{1N}{}_L = a \begin{array}{c|cc|cc|c} & 0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline & & & A & & 0 \\ & & & & A & 34 \\ \hline & A & & & & 123 \\ & & A & & & 124 \\ \hline \end{array} \,,$$

$$C^{2N}{}_L = 1 \begin{array}{c|cc|cc|c} & 0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline & & & A & & 0 \\ & & & & A & 34 \\ \hline & A & & & & 123 \\ & & A & & & 124 \\ \hline \end{array} \,, \quad C^{3N}{}_L = i \begin{array}{c|cc|cc|c} & 0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline & & & -B & & 0 \\ & & & & -B & 34 \\ \hline & B & & & & 123 \\ & & B & & & 124 \\ \hline \end{array} \,.$$

$$C^{N}{}_{K0} = 1 \begin{array}{c|cc|cc|c} & 0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline & \mathbb{1} & & & & 0 \\ & & \mathbb{1} & & & 34 \\ \hline & & & \mathbb{1} & & 123 \\ & & & & \mathbb{1} & 124 \\ \hline \end{array} \,, \quad C^{N}{}_{K34} = 1 \begin{array}{c|cc|cc|c} & 0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline & & \mathbb{1} & & & 0 \\ & \mathbb{1} & & & & 34 \\ \hline & & & & \mathbb{1} & 123 \\ & & & \mathbb{1} & & 124 \\ \hline \end{array} \,.$$

3. Уравнение релятивистской квантовой механики для синих кваркино

Уравнение релятивистской квантовой механики для свободных синих кваркино получим, подставив в уравнение (7) вышеприведенные структурные матрицы. Для Для действительного регулярного представления алгебры синих кваркино $\mathbb{Q}_b^*$ компоненты волновой функции $\psi^K(x)$ представляют собой шестнадцать действительных функций. В iab-представлении волновая функция содержит восемь компонент вида (15). И в IAB-представлении компонентами волновой функции являются четыре IAB-функции вида (16). Приведем уравнения квантовой механики по отношению к IAB-компонентам волновой функции синих кваркино:

$$\left(-i \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & & 1 \\ & & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ 1 & & & \\ \hline \end{array} \, \partial_4 + a \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & A & \\ & & & A \\ \hline A & & & \\ & A & & \\ \hline \end{array} \, \partial_1 + \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & A & \\ & & & A \\ \hline A & & & \\ & A & & \\ \hline \end{array} \, \partial_2 + i \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & -B & \\ & & & -B \\ \hline B & & & \\ & B & & \\ \hline \end{array} \, \partial_3 \right) \left\| \begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} \right\| = -\frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\, p} \begin{array}{|cc|cc|} \hline \alpha & \beta & & \\ \beta & \alpha & & \\ \hline & & \alpha & \beta \\ & & \beta & \alpha \\ \hline \end{array} \left\| \begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} \right\|$$

Или

$$\begin{aligned} i\,\partial_4 \Psi^{124} \quad & -(a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 - i\,B\,\partial_3)\Psi^{123} \\ & = \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\, p}\,(\alpha \cdot \Psi^0 + \beta \cdot \Psi^{34})\,, \\ i\,\partial_4 \Psi^{123} \quad & -(a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 - i\,B\,\partial_3)\Psi^{124} \\ & = \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\, p}\,(\beta \cdot \Psi^0 + \alpha \cdot \Psi^{34})\,, \\ i\,\partial_4 \Psi^{34} \quad & -(a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\Psi^{0} \\ & = \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\, p}\,(\alpha \cdot \Psi^{123} + \beta \cdot \Psi^{124})\,, \\ i\,\partial_4 \Psi^{0} \quad & -(a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\Psi^{34} \\ & = \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\, p}\,(\beta \cdot \Psi^{123} + \alpha \cdot \Psi^{124})\,. \end{aligned} \tag{17}$$

4. Стандартное представление уравнения квантовой механики для синих кваркино.

Преобразуем уравнения (17) следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым а третье с четвертым. Получим

$$\begin{aligned} i\,\partial_4 \varphi_2 - (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 - i\,B\,\partial_3)\,\varphi_2 &= \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\, p}\,(\alpha + \beta)\,\varphi_1\,, \\ i\,\partial_4 \varphi_1 - (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\,\varphi_1 &= \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\, p}\,(\alpha + \beta)\,\varphi_2\,, \end{aligned} \tag{18}$$

где $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{34}$ и $\varphi_2 = \Psi^{123} + \Psi^{124}$. Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$i\,\partial_4 \chi_2 + (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\,\chi_2 = \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\, p}\,(\beta - \alpha)\,\chi_1\,,$$

$$i\,\partial_4\chi_1 + (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 - i\,B\,\partial_3)\,\chi_1 = \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,p}\,(\beta - \alpha)\,\chi_2\,, \tag{19}$$

где $\chi_1 = \Psi^{123} - \Psi^{124}$ и $\chi_2 = \Psi^0 - \Psi^{34}$.

Или с учетом (5) и (6)

$$\begin{aligned} i\,\partial_4\varphi_2 - (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 - i\,B\,\partial_3)\,\varphi_2 &= \frac{\mathrm{m}_d\,c}{p}\,\varphi_1\,,\\ i\,\partial_4\varphi_1 - (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\,\varphi_1 &= \frac{\mathrm{m}_d\,c}{p}\,\varphi_2\,, \end{aligned} \tag{20}$$

и

$$\begin{aligned} i\,\partial_4\chi_2 + (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\,\chi_2 &= \frac{\mathrm{m}_u\,c}{p}\,\chi_1\,,\\ i\,\partial_4\chi_1 + (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 - i\,B\,\partial_3)\,\chi_1 &= \frac{\mathrm{m}_u\,c}{p}\,\chi_2\,, \end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, система из четырех уравнений преобразуется в две системы из двух уравнений. Одна из систем представляет уравнение для нижнего синего кваркино с массой m_d, а другая представляет уравнение для верхнего синего кваркино с массой m_u.

4. Желтые кваркино

Алгебра желтых кваркино определяется диаграммой Юнга

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\\hline 3 & 4\\\hline\end{array}$$

Из нее следуют перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} &\mathbf{12} = \mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32}\,,\\ &\mathbf{14} = -\mathbf{41}\,, \quad \mathbf{24} = \mathbf{42}\,, \quad \mathbf{34} = \mathbf{43}\,. \end{aligned}$$

Отсюда пространство действия желтых кваркино $\mathbb{Q}_y^*$ есть множество векторов вида

$$\begin{gathered} \psi = \mathfrak{e}_0\,\psi^0 + \mathfrak{e}_i\,\psi^i + \mathfrak{e}_{\langle 21\rangle}\,\psi^{\langle 12\rangle} + \mathfrak{e}_{[13]}\,\psi^{[31]} + \mathfrak{e}_{\langle 32\rangle}\,\psi^{\langle 23\rangle} +\\ + \mathfrak{e}_{[14]}\,\psi^{[41]} + \mathfrak{e}_{\langle 42\rangle}\,\psi^{\langle 24\rangle} + \mathfrak{e}_{\langle 34\rangle}\,\psi^{\langle 43\rangle} + \mathfrak{e}_{(123)_3}\,\psi^{(321)_3}\\ + \mathfrak{e}_{(124)_3}\,\psi^{(421)_3} + \mathfrak{e}_{(134)_2}\,\psi^{(431)_2} + \mathfrak{e}_{(234)_3 s}\,\psi^{(432)_3} +\\ + \mathfrak{e}_{(1324)_7}\,\psi^{(4231)_7}\,. \end{gathered}$$

Если пространство с базисными векторами $\mathfrak{e}_{i_p \ldots i_1}$ обозначить $(\mathbb{Q}_y^*)^p$ то пространство алгебры желтых кваркино $\mathbb{Q}_y^*$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{Q}_y^* = \mathbb{Q}^0 + \mathbb{Q}^1 + (\mathbb{Q}_y^*)^2 + (\mathbb{Q}_y^*)^3 + \mathbb{Q}^4\,.$$

1. Базисные векторы и их произведения

Укажем базисные векторы алгебры $\mathbb{Q}_y^*$ и правила умножения, которым они подчиняются.

- ρ_0 – базисный вектор скалярной части вектора. Для ρ_0 имеет место правило умножения

$$\rho_0 \circ \rho_0 = \rho_0\,.$$

- Образующие векторы ρ_i, где индекс i пробегает значения от 1 до 4, есть базисные векторы пространства-времени СТО. Число векторов ρ_i равно четырем. Для них имеют место правила умножения

$$\rho_i \circ \rho_0 = \rho_0 \circ \rho_i = \rho_i\,.$$

$$\rho_i \circ \rho_i = \operatorname{sign}\rho_i\,,$$

где

$$\operatorname{sign}\rho_1 = \operatorname{sign}\rho_2 = \operatorname{sign}\rho_3 = -\operatorname{sign}\rho_4 = \rho_0\,.$$

- Векторы

$$\rho_{ik} = \rho_k \circ \rho_i\,.$$

Здесь $i \neq k$. Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6\,.$$

В соответствии с Разделом IV Лекции 14 для этих векторов выполняется правило перестановки индексов и, соответственно, сомножителей (перестановочные соотношения)

$$\begin{aligned} &\rho_{21} = \rho_{21}\,, \quad \rho_{13} = -\rho_{31}\,, \quad \rho_{32} = \rho_{23}\,,\\ &\rho_{14} = -\rho_{41}\,, \quad \rho_{24} = \rho_{42}\,, \quad \rho_{34} = \rho_{43}\,. \end{aligned}$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и перестановочных соотношений. В частности, имеем

$$\begin{aligned} \rho_{21} \circ \rho_{21} &= \rho_0\,, & \rho_{42} \circ \rho_{42} &= -\rho_0\,,\\ \rho_{32} \circ \rho_{32} &= \rho_0\,, & \rho_{14} \circ \rho_{14} &= \rho_0\,,\\ \rho_{13} \circ \rho_{13} &= -\rho_0\,, & \rho_{34} \circ \rho_{34} &= -\rho_0\,. \end{aligned}$$

- Векторы

$$\rho_{ikl} = \rho_l \circ \rho_k \circ \rho_i\,.$$

Здесь $i \neq k\,, i \neq l\,, k \neq l$. Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4\,.$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из перестановочных соотношений

$$\begin{gathered}
\rho_{123} = \rho_{213} = -\rho_{231} = -\rho_{321} = -\rho_{312} = \rho_{132}\,,\\
\rho_{124} = \rho_{214} = -\rho_{241} = -\rho_{421} = -\rho_{412} = \rho_{142}\,,\\
\rho_{134} = -\rho_{314} = \rho_{341} = \rho_{431} = -\rho_{413} = \rho_{143}\,,\\
\rho_{234} = \rho_{324} = \rho_{342} = \rho_{432} = \rho_{423} = \rho_{243}\,.
\end{gathered}$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\begin{aligned}
\rho_{123} \circ \rho_{123} &= -\rho_0\,, &\qquad \rho_{124} \circ \rho_{124} &= \rho_0\,,\\
\rho_{134} \circ \rho_{134} &= -\rho_0\,, &\qquad \rho_{234} \circ \rho_{234} &= -\rho_0\,.
\end{aligned}$$

- Вектор

$$\rho_{1324} = \rho_1 \circ \rho_3 \circ \rho_2 \circ \rho_4\,.$$

Здесь $i \neq k\,, i \neq l\,, i \neq m\,, k \neq l\,, k \neq m\,, l \neq m\,.$ Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по четыре, то есть единице

$$C_4^4 = 1\,.$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из перестановочных соотношений

$$\begin{gathered}
\rho_{1234} = \rho_{2134} = -\rho_{2314} = -\rho_{3214} =\\
-\rho_{3124} = \rho_{1324} = \rho_{1243} = \rho_{2143} =\\
-\rho_{2413} = -\rho_{4213} = -\rho_{4123} = \rho_{1423} =\\
\rho_{1342} = -\rho_{3142} = \rho_{3412} = \rho_{4312} =\\
-\rho_{4132} = \rho_{1432} = \rho_{2341} = \rho_{3241} =\\
\rho_{3421} = \rho_{4321} = \rho_{4231} = \rho_{2431}\,.
\end{gathered}$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\rho_{1324} \circ \rho_{1324} = -\rho_0\,.$$

2. Структурные матрицы алгебры желтых кваркино $\mathbb{Q}_y^*$

Используя Приложение к настоящей Лекции, приведем структурные матрицы алгебры $\mathbb{Q}_y^*$, необходимые для построения уравнения релятивистской квантовой механики для свободных желтых кваркино.

$$C^{4N}{}_L = i \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 34 & 123 & 124 \end{array} \\ \left|\begin{array}{cc|cc} & & & -B \\ & & B & \\ \hline & B & & \\ -B & & & \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \,, \qquad C^{1N}{}_L = a \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 34 & 123 & 124 \end{array} \\ \left|\begin{array}{cc|cc} & & A & \\ & & & A \\ \hline A & & & \\ & A & & \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \,,$$

$$C^{2N}{}_L = 1 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 34 & 123 & 124 \end{array} \\ \left|\begin{array}{cc|cc} & & A & \\ & & & A \\ \hline A & & & \\ & A & & \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \,, \qquad C^{3N}{}_L = i \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 34 & 123 & 124 \end{array} \\ \left|\begin{array}{cc|cc} & & -B & \\ & & & -B \\ \hline B & & & \\ & B & & \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \,,$$

$$C^{N}{}_{K0} = 1 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 34 & 123 & 124 \end{array} \\ \left|\begin{array}{cc|cc} \mathbb{1} & & & \\ & \mathbb{1} & & \\ \hline & & \mathbb{1} & \\ & & & \mathbb{1} \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \,, \qquad C^{N}{}_{K34} = 1 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 34 & 123 & 124 \end{array} \\ \left|\begin{array}{cc|cc} & -\mathbb{1} & & \\ \mathbb{1} & & & \\ \hline & & & -\mathbb{1} \\ & & \mathbb{1} & \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \,.$$

3. Уравнение релятивистской квантовой механики для желтых кваркино

Уравнение релятивистской квантовой механики для свободных желтых кваркино получим, подставив в уравнение (7) вышеприведенные структурные матрицы. Для действительного регулярного представления алгебры желтых кваркино $\mathbb{Q}_y^*$ компоненты волновой функции $\psi^K(x)$ представляют собой шестнадцать действительных функций. В iab-представлении волновая функция содержит восемь компонент вида (15). И в IAB-представлении компонентами волновой функции являются четыре IAB-функции вида (16). Приведем уравнения квантовой механики по отношению к IAB-компонентам волновой функции желтых кваркино:

$$\begin{gathered}
\left(i \left|\begin{array}{cc|cc} & & & -B \\ & & B & \\ \hline & B & & \\ -B & & & \end{array}\right| \partial_4 + a \left|\begin{array}{cc|cc} & & A & \\ & & & A \\ \hline A & & & \\ & A & & \end{array}\right| \partial_1 + \right.\\
\left. \left|\begin{array}{cc|cc} & & A & \\ & & & A \\ \hline A & & & \\ & A & & \end{array}\right| \partial_2 + i \left|\begin{array}{cc|cc} & & -B & \\ & & & -B \\ \hline B & & & \\ & B & & \end{array}\right| \partial_3 \right) \left\| \begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} \right\| \\
= -\frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\, p} \left|\begin{array}{cc|cc} \alpha & -\beta & & \\ \beta & \alpha & & \\ \hline & & \alpha & -\beta \\ & & \beta & \alpha \end{array}\right| \left\| \begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} \right\|
\end{gathered}$$

Или

$$
\begin{aligned}
i\,B\,\partial_4\Psi^{124} \quad & -(a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 - i\,B\,\partial_3)\Psi^{123} \\
& = \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,p}\,(\alpha\cdot\Psi^0 - \beta\cdot\Psi^{34})\,, \\
-i\,B\,\partial_4\Psi^{123} \quad & -(a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 - i\,B\,\partial_3)\Psi^{124} \\
& = \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,p}\,(\beta\cdot\Psi^0 + \alpha\cdot\Psi^{34})\,, \\
-i\,B\,\partial_4\Psi^{34} \quad & -(a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\Psi^{0} \\
& = \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,p}\,(\alpha\cdot\Psi^{123} - \beta\cdot\Psi^{124})\,, \\
i\,B\,\partial_4\Psi^{0} \quad & -(a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\Psi^{34} \\
& = \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,p}\,(\beta\cdot\Psi^{123} + \alpha\cdot\Psi^{124})\,.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

4. Стандартное представление уравнения квантовой механики для желтых кваркино.

Преобразуем уравнения (22) следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым а третье с четвертым. Получим

$$
\begin{aligned}
& -i\,B\,\partial_4\chi_1 - (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 - i\,B\,\partial_3)\,\varphi_2 = \frac{\mathrm{m}_1\,c}{2\,p}\,\varphi_1 + \frac{\mathrm{m}_2\,c}{2\,p}\,\chi_2\,, \\
& i\,B\,\partial_4\chi_2 - (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\,\varphi_1 = \frac{\mathrm{m}_1\,c}{2\,p}\,\varphi_2 + \frac{\mathrm{m}_2\,c}{2\,p}\,\chi_1\,,
\end{aligned}
\tag{23}
$$

где $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{34}$ и $\varphi_2 = \Psi^{123} + \Psi^{124}$, $\chi_1 = \Psi^{123} - \Psi^{124}$ и $\chi_2 = \Psi^0 - \Psi^{34}$, $\mathrm{m}_1 = \mathrm{m}_d\,\alpha$, $\mathrm{m}_2 = \mathrm{m}_d\,\beta$.

Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$
\begin{aligned}
& i\,B\,\partial_4\varphi_1 + (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\,\chi_2 = -\frac{\mathrm{m}_1\,c}{2\,p}\,\chi_1 + \frac{\mathrm{m}_2\,c}{2\,p}\,\varphi_2\,, \\
& -i\,B\,\partial_4\varphi_2 + (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 - i\,B\,\partial_3)\,\chi_1 = -\frac{\mathrm{m}_1\,c}{2\,p}\,\chi_2 + \frac{\mathrm{m}_2\,c}{2\,p}\,\varphi_1\,,
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Таким образом, система уравнений для желтых кваркино не разделяется на две системы, которые относились бы к разным частицам – верхней и нижней. Следовательно, желтое кваркино представлено одной частицей с четырехкомпонентной волновой функцией.

5. Красные кваркино

Алгебра красных кваркино определяется диаграммой Юнга

$$
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
1 & 2 & 4 \\
\hline
3 \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

Из нее следуют перестановочные соотношения

$$
\begin{gathered}
\mathbf{12} = \mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32}\,, \\
\mathbf{14} = \mathbf{41}\,, \quad \mathbf{24} = \mathbf{42}\,, \quad \mathbf{34} = \mathbf{43}\,.
\end{gathered}
$$

Отсюда пространство действия красных кваркино $\mathbb{Q}^*_R$ есть множество векторов вида

$$
\begin{gathered}
\psi = \mathfrak{e}_0\,\psi^0 + \mathfrak{e}_i\,\psi^i + \mathfrak{e}_{\langle 21\rangle}\,\psi^{\langle 12\rangle} + \mathfrak{e}_{[13]}\,\psi^{[31]} + \mathfrak{e}_{\langle 32\rangle}\,\psi^{\langle 23\rangle} + \\
+ \mathfrak{e}_{\langle 14\rangle}\,\psi^{\langle 41\rangle} + \mathfrak{e}_{\langle 42\rangle}\,\psi^{\langle 24\rangle} + \mathfrak{e}_{\langle 34\rangle}\,\psi^{\langle 43\rangle} + \mathfrak{e}_{(123)_3}\,\psi^{(321)_3} \\
+ \mathfrak{e}_{\langle 124\rangle}\,\psi^{\langle 421\rangle} + \mathfrak{e}_{(134)_3}\,\psi^{(431)_3} + \mathfrak{e}_{\langle 234\rangle}\,\psi^{\langle 432\rangle} + \\
+ \mathfrak{e}_{(1324)_8}\,\psi^{(4231)_8}\,.
\end{gathered}
$$

Если пространство с базисными векторами $\mathfrak{e}_{i_p\ldots i_1}$ обозначить $(\mathbb{Q}^*_r)^p$ то пространство алгебры красных кваркино $\mathbb{Q}^*_r$ представляет собой сумму пространств:

$$
\mathbb{Q}^*_r = \mathbb{Q}^{*0} + \mathbb{Q}^{*1} + (\mathbb{Q}^*_r)^2 + (\mathbb{Q}^*_r)^3 + (\mathbb{Q}^*_r)^4\,.
$$

1. Базисные векторы и их произведения

Укажем базисные векторы алгебры $\mathbb{Q}^*_r$ и правила умножения, которым они подчиняются.

- ρ_0 – базисный вектор скалярной части вектора. Для ρ_0 имеет место правило умножения

  $$\rho_0 \circ \rho_0 = \rho_0\,.$$

- Образующие векторы ρ_i, где индекс i пробегает значения от 1 до 4, есть базисные векторы пространства-времени СТО. Число векторов ρ_i равно четырем. Для них имеют место правила умножения

  $$\rho_i \circ \rho_0 = \rho_0 \circ \rho_i = \rho_i\,.$$

  $$\rho_i \circ \rho_i = \operatorname{sign}\rho_i\,,$$

  где

  $$\operatorname{sign}\rho_1 = \operatorname{sign}\rho_2 = \operatorname{sign}\rho_3 = -\operatorname{sign}\rho_4 = \rho_0\,.$$

- Векторы

  $$\rho_{ik} = \rho_k \circ \rho_i\,.$$

  Здесь $i \neq k$. Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

  $$C_4^2 = 6\,.$$

  В соответствии с Разделом IV Лекции 14 для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей (перестановочные соотношения)

$$\rho_{21} = \rho_{21}\,, \quad \rho_{13} = -\rho_{31}\,, \quad \rho_{32} = \rho_{23}\,,$$
$$\rho_{14} = \rho_{41}\,, \quad \rho_{24} = \rho_{42}\,, \quad \rho_{34} = \rho_{43}\,.$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и перестановочных соотношений. В частности, имеем

$$\rho_{21} \circ \rho_{21} = \rho_0\,, \qquad \rho_{42} \circ \rho_{42} = -\rho_0\,,$$
$$\rho_{32} \circ \rho_{32} = \rho_0\,, \qquad \rho_{14} \circ \rho_{14} = -\rho_0\,,$$
$$\rho_{13} \circ \rho_{13} = -\rho_0\,, \qquad \rho_{34} \circ \rho_{34} = -\rho_0\,.$$

- Векторы

$$\rho_{ikl} = \rho_l \circ \rho_k \circ \rho_i\,.$$

Здесь $i \neq k\,, i \neq l\,, k \neq l$. Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4\,.$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из перестановочных соотношений

$$\rho_{123} = \rho_{213} = -\rho_{231} = -\rho_{321} = -\rho_{312} = \rho_{132}\,,$$
$$\rho_{124} = \rho_{214} = \rho_{241} = \rho_{421} = \rho_{412} = \rho_{142}\,,$$
$$\rho_{134} = -\rho_{314} = -\rho_{341} = -\rho_{431} = \rho_{413} = \rho_{143}\,,$$
$$\rho_{234} = \rho_{324} = \rho_{342} = \rho_{432} = \rho_{423} = \rho_{243}\,.$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\rho_{123} \circ \rho_{123} = -\rho_0\,, \qquad \rho_{124} \circ \rho_{124} = -\rho_0\,,$$
$$\rho_{134} \circ \rho_{134} = \rho_0\,, \qquad \rho_{234} \circ \rho_{234} = -\rho_0\,.$$

- Вектор

$$\rho_{1324} = \rho_1 \circ \rho_3 \circ \rho_2 \circ \rho_4\,.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из перестановочных соотношений

$$\rho_{1234} = \rho_{2134} = -\rho_{2314} = -\rho_{3214} =$$
$$-\rho_{3124} = \rho_{1324} = \rho_{1243} = \rho_{2143} =$$
$$\rho_{2413} = \rho_{4213} = \rho_{4123} = \rho_{1423} =$$
$$\rho_{1342} = -\rho_{3142} = -\rho_{3412} = -\rho_{4312} =$$
$$\rho_{4132} = \rho_{1432} = -\rho_{2341} = -\rho_{3241} =$$
$$-\rho_{3421} = -\rho_{4321} = -\rho_{4231} = -\rho_{2431}\,.$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\rho_{1324} \circ \rho_{1324} = \rho_0\,.$$

2. Структурные матрицы алгебры красных кваркино $\mathbb{Q}_r^*$

Используя Приложение к настоящей Лекции, приведем структурные матрицы алгебры $\mathbb{Q}_r^*$, необходимые для построения уравнения релятивистской квантовой механики для свободных красных кваркино.

$$C^{4N}{}_{L} = a \begin{array}{cc|cc|l} 0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline & & & \mathbb{1} & 0 \\ & & -\mathbb{1} & & 34 \\ \hline & \mathbb{1} & & & 123 \\ -\mathbb{1} & & & & 124 \\ \hline \end{array}\,, \qquad C^{1N}{}_{L} = a \begin{array}{cc|cc|l} 0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline & & A & & 0 \\ & & & A & 34 \\ \hline A & & & & 123 \\ & A & & & 124 \\ \hline \end{array}\,,$$

$$C^{2N}{}_{L} = 1 \begin{array}{cc|cc|l} 0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline & & A & & 0 \\ & & & A & 34 \\ \hline A & & & & 123 \\ & A & & & 124 \\ \hline \end{array}\,, \qquad C^{3N}{}_{L} = i \begin{array}{cc|cc|l} 0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline & & -B & & 0 \\ & & & -B & 34 \\ \hline B & & & & 123 \\ & B & & & 124 \\ \hline \end{array}\,.$$

$$C^{N}{}_{K0} = 1 \begin{array}{cc|cc|l} 0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline \mathbb{1} & & & & 0 \\ & \mathbb{1} & & & 34 \\ \hline & & \mathbb{1} & & 123 \\ & & & \mathbb{1} & 124 \\ \hline \end{array}\,, \qquad C^{N}{}_{K34} = 1 \begin{array}{cc|cc|l} 0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline & -\mathbb{1} & & & 0 \\ \mathbb{1} & & & & 34 \\ \hline & & & -\mathbb{1} & 123 \\ & & \mathbb{1} & & 124 \\ \hline \end{array}\,.$$

3. Уравнение релятивистской квантовой механики для красных кваркино

Уравнение релятивистской квантовой механики для свободных красных кваркино получим, подставив в уравнение (7) вышеприведенные структурные матрицы. Для действительного регулярного представления алгебры кварков $\mathbb{Q}(u, d)$ компоненты волновой функции $\psi^K(x)$ представляют собой шестнадцать действительных функций. В iab-представлении волновая функция содержит восемь компонент вида (15). И в IAB-представлении компонентами волновой функции являются четыре IAB-функции вида (16). Приведем уравнения квантовой механики по отношению к IAB-компонентам волновой функции красных кваркино:

$$\left(a \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & & 1 \\ & & -1 & \\ \hline & 1 & & \\ -1 & & & \\ \hline \end{array}\ \partial_4 + a \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & A & \\ & & & A \\ \hline A & & & \\ & A & & \\ \hline \end{array}\ \partial_1 + \right.$$
$$\left. \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & A & \\ & & & A \\ \hline A & & & \\ & A & & \\ \hline \end{array}\ \partial_2 + i \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & -B & \\ & & & -B \\ \hline B & & & \\ & B & & \\ \hline \end{array}\ \partial_3 \right) \begin{Vmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{Vmatrix}$$
$$= -\frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\, q} \begin{array}{|cc|cc|} \hline \alpha & -\beta & & \\ \beta & \alpha & & \\ \hline & & \alpha & -\beta \\ & & \beta & \alpha \\ \hline \end{array} \begin{Vmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{Vmatrix}$$

Или

$$
\begin{aligned}
-a\,\partial_4\Psi^{124} \quad &-(a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 - i\,B\,\partial_3)\Psi^{123} \\
&= \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,p}\,(\alpha\cdot\Psi^0 - \beta\cdot\Psi^{34})\,, \\
a\,\partial_4\Psi^{123} \quad &-(a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 - i\,B\,\partial_3)\Psi^{124} \\
&= \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,p}\,(\beta\cdot\Psi^0 + \alpha\cdot\Psi^{34})\,, \\
-a\,\partial_4\Psi^{34} \quad &-(a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\Psi^{0} \\
&= \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,p}\,(\alpha\cdot\Psi^{123} - \beta\cdot\Psi^{124})\,, \\
a\,\partial_4\Psi^{0} \quad &-(a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\Psi^{34} \\
&= \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,p}\,(\beta\cdot\Psi^{123} + \alpha\cdot\Psi^{124})\,.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

4. Стандартное представление уравнения квантовой механики для красных кваркино.

Преобразуем уравнения (25) следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым а третье с четвертым. Получим

$$
\begin{aligned}
&a\,B\,\partial_4\chi_1 - (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 - i\,B\,\partial_3)\,\varphi_2 = \frac{\mathrm{m}_1\,c}{2\,p}\,\varphi_1 + \frac{\mathrm{m}_2\,c}{2\,p}\,\chi_2\,, \\
&a\,\partial_4\chi_2 - (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\,\varphi_1 = \frac{\mathrm{m}_1\,c}{2\,p}\,\varphi_2 + \frac{\mathrm{m}_2\,c}{2\,p}\,\chi_1\,,
\end{aligned}
\tag{26}
$$

где $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{34}$ и $\varphi_2 = \Psi^{123} + \Psi^{124}$, $\chi_1 = \Psi^{123} - \Psi^{124}$ и $\chi_2 = \Psi^0 - \Psi^{34}$, $\mathrm{m}_1 = \mathrm{m}_d\,\alpha$, $\mathrm{m}_2 = \mathrm{m}_d\,\beta$.

Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$
\begin{aligned}
&a\,\partial_4\varphi_1 + (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + i\,B\,\partial_3)\,\chi_2 = -\frac{\mathrm{m}_1\,c}{2\,p}\,\chi_1 + \frac{\mathrm{m}_2\,c}{2\,p}\,\varphi_2\,, \\
&a\,\partial_4\varphi_2 + (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 - i\,B\,\partial_3)\,\chi_1 = -\frac{\mathrm{m}_1\,c}{2\,p}\,\chi_2 + \frac{\mathrm{m}_2\,c}{2\,p}\,\varphi_1\,,
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Таким образом, система уравнений для красных кваркино не разделяется на две системы, которые относились бы к разным частицам – верхней и нижней. Следовательно, красное кваркино представлено одной частицей с четырехкомпонентной волновой функцией.

IV. ЧЕРНЫЕ ЛЕПТИНО

Алгебра черных лептино $\mathbb{C}_b^*$ определяется диаграммой Юнга

$$
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
1 & 2 & 3 \\
\hline
4 \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

Из нее следуют перестановочные соотношения

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{12 = 21}\,, \quad \mathbf{13 = 31}\,, \quad \mathbf{23 = 32}\,, \\
&\mathbf{14 = -41}\,, \quad \mathbf{24 = 42}\,, \quad \mathbf{34 = 43}\,.
\end{aligned}
$$

Отсюда пространство действия черных лептино $\mathbb{C}_b^*$ есть множество векторов вида

$$
\begin{aligned}
\psi = \mathfrak{e}_0\,\psi^0 + \mathfrak{e}_i\,\psi^i + \mathfrak{e}_{\langle ab\rangle}\,\psi^{\langle ba\rangle} + \\
+\mathfrak{e}_{[14]}\,\psi^{[41]} + \mathfrak{e}_{\langle 42\rangle}\,\psi^{\langle 24\rangle} + \mathfrak{e}_{\langle 34\rangle}\,\psi^{\langle 43\rangle} + \mathfrak{e}_{\langle 123\rangle}\,\psi^{\langle 321\rangle} + \\
+\mathfrak{e}_{(124)_3}\,\psi^{(421)_3} + \mathfrak{e}_{(134)_3}\,\psi^{(431)_3} + \mathfrak{e}_{\langle 234\rangle}\,\psi^{\langle 432\rangle} + \\
+\mathfrak{e}_{4321}\,\psi^{1234}\,.
\end{aligned}
$$

Если пространство с базисными векторами $\mathfrak{e}_{i_p\ldots i_1}$ обозначить $(\mathbb{C}_b^*)^p$ то пространство алгебры черных лептино $\mathbb{C}_b^*$ представляет собой сумму пространств:

$$
\mathbb{C}_b^* = (\mathbb{C}^*)^0 + (\mathbb{C}^*)^1 + (\mathbb{C}_b^*)^2 + (\mathbb{C}_b^*)^3 + (\mathbb{C}_b^*)^4\,.
$$

Далее, как и прежде, базисные векторы $\mathfrak{e}$ по отношению к алгебре лептино будем обозначать κ.

1. iab-представление алгебры лептино $\mathbb{C}_4^*$

iab-представление основано на следующем разложении вектора:

$$
\begin{aligned}
\psi = \kappa_{13}\circ(\kappa_{21}\,\psi^{32} + \kappa_0\,\psi^{13}) + \kappa_0\circ(\kappa_{21}\,\psi^{21} + \kappa_0\,\psi^0) + \\
\kappa_{14}\circ(\kappa_{21}\,\psi^{42} + \kappa_0\,\psi^{14}) + \kappa_{34}\circ(\kappa_{21}\,\psi^{1324} + \kappa_0\,\psi^{34}) + \\
\kappa_{2}\circ(\kappa_{21}\,\psi^{1} + \kappa_0\,\psi^{2}) + \kappa_{123}\circ(\kappa_{21}\,\psi^{3} + \kappa_0\,\psi^{123}) + \\
\kappa_{234}\circ(\kappa_{21}\,\psi^{134} + \kappa_0\,\psi^{234}) + \kappa_{124}\circ(\kappa_{21}\,\psi^{4} + \kappa_0\,\psi^{124})\,.
\end{aligned}
$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{C}_4^*$ в виде произведения $\mathbb{C}_3^*\times\mathbb{C}_1^*$ (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_3$ являются

$$
\kappa_{13}\,,\quad \kappa_0\,,\quad \kappa_{14}\,,\quad \kappa_{34}\,,\quad \kappa_2\,,\kappa_{123}\,,\quad \kappa_{234}\,,\quad \kappa_{124}\,;
$$

базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_1^*$ являются

$$
\kappa_{21}\,,\quad \kappa_0\,.
$$

Поставим в соответствие базисному вектору κ_{21} алгебры $\mathbb{C}_1^*$ a единицу, а базисному вектору κ_0 действительную единицу. В результате получим вектор алгебры $\mathbb{C}_4^*$ в iab-представлении имеет вид

$$
\begin{aligned}
\psi = \kappa_{13}\circ(a\,\psi^{32} + \psi^{13}) + \kappa_0\circ(a\,\psi^{21} + \psi^0) + \\
\kappa_{14}\circ(a\,\psi^{42} + \psi^{14}) + \kappa_{34}\circ(a\,\psi^{1324} + \psi^{34}) + \\
\kappa_{2}\circ(a\,\psi^{1} + \psi^{2}) + \kappa_{123}\circ(a\,\psi^{3} + \psi^{123}) + \\
\kappa_{234}\circ(a\,\psi^{134} + \psi^{234}) + \kappa_{124}\circ(a\,\psi^{4} + \psi^{124})\,.
\end{aligned}
$$

Таким образом, в iab-представлении координаты (компоненты) вектора являются a-гиперчислами. Введем для них обозначение

$$
\begin{array}{llll}
\boldsymbol{\psi}^{13} = a\,\psi^{32} + \psi^{13}\,, & \boldsymbol{\psi}^{0} = a\,\psi^{21} + \psi^{0}\,, \\
\boldsymbol{\psi}^{14} = a\,\psi^{42} + \psi^{14}\,, & \boldsymbol{\psi}^{34} = a\,\psi^{1324} + \psi^{34}\,, \\
\boldsymbol{\psi}^{2} = a\,\psi^{1} + \psi^{2}\,, & \boldsymbol{\psi}^{123} = a\,\psi^{3} + \psi^{123}\,, \\
\boldsymbol{\psi}^{234} = a\,\psi^{134} + \psi^{234}\,, & \boldsymbol{\psi}^{124} = a\,\psi^{4} + \psi^{124}\,.
\end{array}
\qquad (28)
$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$
\psi = \kappa_{13}\,\boldsymbol{\psi}^{13} + \kappa_0\,\boldsymbol{\psi}^{0} + \kappa_{14}\,\boldsymbol{\psi}^{14} + \kappa_{34}\,\boldsymbol{\psi}^{34} + \kappa_2\,\boldsymbol{\psi}^{2} + \kappa_{123}\,\boldsymbol{\psi}^{123} + \kappa_{234}\,\boldsymbol{\psi}^{234} + \kappa_{124}\,\boldsymbol{\psi}^{124}\,.
$$

Отсюда видно, что в iab-представлении вектор ψ проецируется на направления κ_{13}, κ_0, κ_{14}, κ_{34}, κ_2, κ_{123}, κ_{234}, κ_{124}.

В iab-представлении структурные матрицы имеют размерность 8×8 (см. Приложение к Лекции).

2. IAB-представление алгебры лептино $\mathbb{C}_4^*$

IAB-представление алгебры $\mathbb{C}_4^*$ основано на разложении вектора:

$$
\begin{aligned}
\psi = {} & (\kappa_{32}\,\psi^{32} + \kappa_{13}\,\psi^{13} + \kappa_{21}\,\psi^{21} + \kappa_0\,\psi^{0}) \circ \kappa_0 + \\
& (\kappa_{32}\,\psi^{42} + \kappa_{13}\,\psi^{14} + \kappa_{21}\,\psi^{1324} + \kappa_0\,\psi^{34}) \circ \kappa_{34} + \\
& (\kappa_{32}\,\psi^{1} + \kappa_{13}\,\psi^{2} + \kappa_{21}\,\psi^{3} + \kappa_0\,\psi^{123}) \circ \kappa_{123} + \\
& (\kappa_{32}\,\psi^{134} + \kappa_{13}\,\psi^{234} + \kappa_{21}\,\psi^{4} + \kappa_0\,\psi^{124}) \circ \kappa_{124}\,.
\end{aligned}
$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{C}_4^*$ в виде произведения $\mathbb{C}_2^* \times \mathbb{C}_2^*$. Базисными векторами одной алгебры $\mathbb{C}_2^*$ являются

$$
\kappa_0\,, \quad \kappa_{34}\,, \quad \kappa_{123}\,, \quad \kappa_{124}\,;
$$

базисными векторами другой алгебры $\mathbb{C}_2^*$ являются

$$
\kappa_{32}\,, \quad \kappa_{13}\,, \quad \kappa_{21}\,, \quad \kappa_0\,.
$$

Последнюю алгебру мы назвали IAB-алгеброй. Эта алгебра аналогична алгебре кватернионов. Для базисных единиц IAB-алгебры используем следующие обозначения

$$
a\cdot A\,, \quad 1\cdot I\,, \quad a\cdot B\,, \quad 1\cdot \mathbb{1}\,.
$$

Заменим базисные векторы κ_{32}, κ_{13}, κ_{21}, κ_0 приведенными гиперчислами в соответствии

$$
\begin{aligned}
\kappa_{32} &\sim a\,A\,, \\
\kappa_{13} &\sim 1\,I\,, \\
\kappa_{21} &\sim a\,B\,, \\
\kappa_{0} &\sim 1\,\mathbb{1}\,.
\end{aligned}
$$

Получим вектор алгебры $\mathbb{Q}_4^*$ в IAB-представлении

$$
\begin{aligned}
\psi = {} & (a\cdot A\,\psi^{32} + 1\cdot I\,\psi^{13} + a\cdot B\,\psi^{21} + \mathbb{1}\,\psi^{0}) \circ \kappa_0 + \\
& (a\cdot A\,\psi^{42} + 1\cdot I\,\psi^{14} + a\cdot B\,\psi^{1324} + \mathbb{1}\,\psi^{34}) \circ \kappa_{34} + \\
& (a\cdot A\,\psi^{1} + 1\cdot I\,\psi^{2} + a\cdot B\,\psi^{3} + \mathbb{1}\,\psi^{123}) \circ \kappa_{123} + \\
& (a\cdot A\,\psi^{134} + 1\cdot I\,\psi^{234} + a\cdot B\,\psi^{4} + \mathbb{1}\,\psi^{124}) \circ \kappa_{124}\,.
\end{aligned}
$$

Таким образом, в IAB-представлении координаты (компоненты) вектора являются гиперчислами. Введем для них обозначение

$$
\begin{aligned}
\Psi^{0} &= a\,A\,\psi^{32} + 1\,I\,\psi^{13} + a\,B\,\psi^{21} + \mathbb{1}\,\psi^{0}\,, \\
\Psi^{34} &= a\,A\,\psi^{42} + 1\,I\,\psi^{14} + a\,B\,\psi^{1324} + \mathbb{1}\,\psi^{34}\,, \\
\Psi^{123} &= a\,A\,\psi^{1} + 1\,I\,\psi^{2} + a\,B\,\psi^{3} + \mathbb{1}\,\psi^{123}\,, \\
\Psi^{124} &= a\,A\,\psi^{134} + 1\,I\,\psi^{234} + a\,B\,\psi^{4} + \mathbb{1}\,\psi^{124}\,.
\end{aligned}
\qquad (29)
$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$
\psi = \Psi^{0}\,\kappa_0 + \Psi^{34}\,\kappa_{34} + \Psi^{123}\,\kappa_{123} + \Psi^{124}\,\kappa_{124}\,.
$$

Отсюда видно, что в IAB-представлении вектор ψ проецируется на направления κ_0, κ_{34}, κ_{123}, κ_{124}.

В IAB-представлении структурные матрицы имеют размерность 4×4 (см. Приложение к Лекции).

3. Базисные векторы и их произведения

Укажем базисные векторы алгебры $\mathbb{C}_b^*$ и правила умножения, которым они подчиняются.

- κ_0 – базисный вектор скалярной части вектора. Для κ_0 имеет место правило умножения

$$
\kappa_0 \circ \kappa_0 = \kappa_0\,.
$$

- Образующие векторы κ_i, где индекс i пробегает значения от 1 до 4, есть базисные векторы пространства-времени СТО. Число векторов κ_i равно четырем. Для них имеют место правила умножения

$$
\kappa_i \circ \kappa_0 = \kappa_0 \circ \kappa_i = \kappa_i\,.
$$

$$
\kappa_i \circ \kappa_i = \operatorname{sign}\kappa_i\,,
$$

  где

$$
\operatorname{sign}\kappa_1 = \operatorname{sign}\kappa_2 = \operatorname{sign}\kappa_3 = -\operatorname{sign}\kappa_4 = \kappa_0\,.
$$

- Векторы

$$
\kappa_{ik} = \kappa_k \circ \kappa_i\,.
$$

  Здесь $i \neq k$. Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$
C_4^2 = 6\,.
$$

  В соответствии с Разделом IV Лекции 14 для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей (перестановочные соотношения)

$$\kappa_{21} = \kappa_{21}\,, \quad \kappa_{13} = \kappa_{31}\,, \quad \kappa_{32} = \kappa_{23}\,,$$
$$\kappa_{14} = -\kappa_{41}\,, \quad \kappa_{24} = \kappa_{42}\,, \quad \kappa_{34} = \kappa_{43}\,.$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и перестановочных соотношений. В частности, имеем

$$\kappa_{21} \circ \kappa_{21} = \kappa_0\,, \qquad \kappa_{42} \circ \kappa_{42} = -\kappa_0\,,$$
$$\kappa_{32} \circ \kappa_{32} = \kappa_0\,, \qquad \kappa_{14} \circ \kappa_{14} = \kappa_0\,,$$
$$\kappa_{13} \circ \kappa_{13} = \kappa_0\,, \qquad \kappa_{34} \circ \kappa_{34} = -\kappa_0\,.$$

- Векторы

$$\kappa_{ikl} = \kappa_l \circ \kappa_k \circ \kappa_i\,.$$

Здесь $i \neq k\,, i \neq l\,, k \neq l$. Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4\,.$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из перестановочных соотношений

$$\kappa_{123} = \kappa_{213} = \kappa_{231} = \kappa_{321} = \kappa_{312} = \kappa_{132}\,,$$
$$\kappa_{124} = \kappa_{214} = -\kappa_{241} = -\kappa_{421} = -\kappa_{412} = \kappa_{142}\,,$$
$$\kappa_{134} = \kappa_{314} = -\kappa_{341} = -\kappa_{431} = -\kappa_{413} = \kappa_{143}\,,$$
$$\kappa_{234} = \kappa_{324} = \kappa_{342} = \kappa_{432} = \kappa_{423} = \kappa_{243}\,.$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\kappa_{123} \circ \kappa_{123} = \kappa_0\,, \qquad \kappa_{124} \circ \kappa_{124} = \kappa_0\,,$$
$$\kappa_{134} \circ \kappa_{134} = \kappa_0\,, \qquad \kappa_{234} \circ \kappa_{234} = -\kappa_0\,.$$

- Вектор

$$\kappa_{1324} = \kappa_1 \circ \kappa_3 \circ \kappa_2 \circ \kappa_4\,.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из перестановочных соотношений

$$\kappa_{1234} = \kappa_{2134} = \kappa_{2314} = \kappa_{3214} =$$
$$\kappa_{3124} = \kappa_{1324} = \kappa_{1243} = \kappa_{2143} =$$
$$-\kappa_{2413} = -\kappa_{4213} = -\kappa_{4123} = \kappa_{1423} =$$
$$\kappa_{1342} = \kappa_{3142} = -\kappa_{3412} = \kappa_{4312} =$$
$$-\kappa_{4132} = \kappa_{1432} = \kappa_{2341} = \kappa_{3241} =$$
$$\kappa_{3421} = \kappa_{4321} = \kappa_{4231} = \kappa_{2431}\,.$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\kappa_{1324} \circ \kappa_{1324} = \kappa_0\,.$$

4. Структурные матрицы алгебры черных лептино $\mathbb{C}_b^*$

Используя Приложение к настоящей Лекции, приведем структурные матрицы алгебры $\mathbb{C}_b^*$, необходимые для построения уравнения релятивистской квантовой механики для свободных черных лептино.

$$C^{4N}{}_L = i \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 0 & 34 & 123 & 124 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \text{-}B \\ & & B & \\ \hline & B & & \\ \text{-}B & & & \end{array}\right] & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \end{array}, \qquad C^{1N}{}_L = a \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 0 & 34 & 123 & 124 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cc|cc} & & A & \\ & & & A \\ \hline A & & & \\ & A & & \end{array}\right] & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \end{array},$$

$$C^{2N}{}_L = 1 \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 0 & 34 & 123 & 124 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cc|cc} & & A & \\ & & & A \\ \hline A & & & \\ & A & & \end{array}\right] & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \end{array}, \qquad C^{3N}{}_L = a \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 0 & 34 & 123 & 124 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cc|cc} & & \mathbb{1} & \\ & & & \mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & & & \\ & \mathbb{1} & & \end{array}\right] & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \end{array}.$$

$$C^{N}{}_{K0} = 1 \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 0 & 34 & 123 & 124 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbb{1} & & & \\ & \mathbb{1} & & \\ \hline & & \mathbb{1} & \\ & & & \mathbb{1} \end{array}\right] & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \end{array}, \qquad C^{N}{}_{K34} = 1 \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 0 & 34 & 123 & 124 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cc|cc} & \text{-}\mathbb{1} & & \\ \mathbb{1} & & & \\ \hline & & & \text{-}\mathbb{1} \\ & & \mathbb{1} & \end{array}\right] & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \end{array}.$$

5. Уравнение релятивистской квантовой механики для черных лептино

Уравнение релятивистской квантовой механики для свободных черных лептино получим, подставив в уравнение (7) вышеприведенные структурные матрицы. Для действительного регулярного представления алгебры черных лептино $\mathbb{C}_b^*$ компоненты волновой функции $\psi^K(x)$ представляют собой шестнадцать действительных функций. В iab-представлении волновая функция содержит восемь компонент вида (28). И в IAB-представлении компонентами волновой функции являются четыре IAB-функции вида (29). Приведем уравнения квантовой механики по отношению к IAB-компонентам волновой функции черных лептино:

$$\left(i \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \text{-}B \\ & & B & \\ \hline & B & & \\ \text{-}B & & & \end{array}\right] \partial_4 + a \left[\begin{array}{cc|cc} & & A & \\ & & & A \\ \hline A & & & \\ & A & & \end{array}\right] \partial_1 + \right.$$
$$\left. \left[\begin{array}{cc|cc} & & A & \\ & & & A \\ \hline A & & & \\ & A & & \end{array}\right] \partial_2 + a \left[\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right] \partial_3 \right) \left\| \begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} \right\|$$
$$= -\frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\, l} \left[\begin{array}{cc|cc} \alpha & -\beta & & \\ \beta & \alpha & & \\ \hline & & \alpha & -\beta \\ & & \beta & \alpha \end{array}\right] \left\| \begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} \right\|$$

Или

$$
\begin{aligned}
i\,B\,\partial_4\Psi^{124} \quad & -(a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + a\,\partial_3)\Psi^{123} \\
& = \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,l}\,(\alpha\cdot\Psi^0 - \beta\cdot\Psi^{34})\,, \\
-i\,B\,\partial_4\Psi^{123} \quad & -(a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + a\,\partial_3)\Psi^{124} \\
& = \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,l}\,(\beta\cdot\Psi^0 + \alpha\cdot\Psi^{34})\,, \\
-i\,B\,\partial_4\Psi^{34} \quad & -(a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + a\,\partial_3)\Psi^{0} \\
& = \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,l}\,(\alpha\cdot\Psi^{123} - \beta\cdot\Psi^{124})\,, \\
i\,B\,\partial_4\Psi^{0} \quad & -(a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + a\,\partial_3)\Psi^{34} \\
& = \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,l}\,(\beta\cdot\Psi^{123} + \alpha\cdot\Psi^{124})\,.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

6. Стандартное представление уравнения квантовой механики для черных лептино.

Преобразуем уравнения (30) следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым а третье с четвертым. Получим

$$
\begin{aligned}
-i\,B\,\partial_4\chi_1 - (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + a\,\partial_3)\,\varphi_2 &= \frac{\mathrm{m}_1\,c}{2\,l}\,\varphi_1 + \frac{\mathrm{m}_2\,c}{2\,l}\,\chi_2\,, \\
i\,B\,\partial_4\chi_2 - (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + a\,\partial_3)\,\varphi_1 &= \frac{\mathrm{m}_1\,c}{2\,l}\,\varphi_2 + \frac{\mathrm{m}_2\,c}{2\,l}\,\chi_1\,,
\end{aligned}
\tag{31}
$$

где $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{34}$ и $\varphi_2 = \Psi^{123} + \Psi^{124}$, $\chi_1 = \Psi^{123} - \Psi^{124}$ и $\chi_2 = \Psi^0 - \Psi^{34}$, $\mathrm{m}_1 = \mathrm{m}_d\,\alpha$, $\mathrm{m}_2 = \mathrm{m}_d\,\beta$.

Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$
\begin{aligned}
i\,B\,\partial_4\varphi_1 + (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + a\,\partial_3)\,\chi_2 &= -\frac{\mathrm{m}_1\,c}{2\,l}\,\chi_1 + \frac{\mathrm{m}_2\,c}{2\,l}\,\varphi_2\,, \\
-i\,B\,\partial_4\varphi_2 + (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 - a\,\partial_3)\,\chi_1 &= -\frac{\mathrm{m}_1\,c}{2\,l}\,\chi_2 + \frac{\mathrm{m}_2\,c}{2\,l}\,\varphi_1\,,
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Таким образом, система уравнений для черных лептино не разделяется на две системы, которые относились бы к разным частицам – верхней и нижней. Следовательно, черное лептино представлено одной частицей с четырехкомпонентной волновой функцией.

V. ВЫВОДЫ.

- Цветовые разновидности гипотетических частиц ставятся в соответствие перестановочным соотношениям с участием базисного вектора времени и геометрических базисных векторов.

- В принятом понимании цвета кваркино имеют три цветовые разновидности – красные, желтые, синие. Лептино имеют две цветовые разновидности – черные и белые.

- Из алгебраической структуры векторов действия гипотетических частиц следуют квантовые постулаты и теория квантовых явлений этих частиц. В общем случае нет оснований считать, что квантовые явления с участием гипотетических частиц определяются постоянной Планка, а не другой постоянной величиной, имеющей размерность действия.

- Структура квантовых уравнений для свободных черных лептонов и синих кваркино такова, что они разделяются на две системы уравнений. Таким образом, мы имеем две частицы, одна из которых это верхняя частица, а другая – нижняя частица.

- Уравнения для верхних и нижних частиц отличаются не только массами частиц, но и знаком одной из компонент оператора импульса. Таким образом, в отличие от лептонов, движение в пространстве нижних кваркино отличается от движения верхних кваркино.

- Структура квантовых уравнений для свободных черных лептонов и синих кваркино такова, что волновые функции этих частиц разделяются на две компоненты – правую и левую подобно тому как это имеет место для лептонов. Такое разделение необходимо для описания электрослабого взаимодействия указанных частиц.