Лекция 6. Антилептоны и контравариантная сопряженная алгебра Клиффорда.

А. А. Кецарис

(4 марта 2004 г.)

В этой лекции мы рассматриваем операцию эрмитова сопряжения и контравариантную сопряженную алгебру Клиффорда как способ описания антилептонов.

I. ВВЕДЕНИЕ. ЭРМИТОВО СОПРЯЖЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ДИРАКА.

Отправной точкой для дальнейших рассуждений будет по прежнему уравнение Дирака

$$\left(\gamma^{i\alpha}{}_{\beta}\,\partial_i + \frac{m_e\,c}{\hbar}\,\gamma^{0\alpha}{}_{\beta}\right)\cdot\psi^{\beta} = 0\,. \tag{1}$$

Дирак нашел, что уравнение, эрмитово сопряженное[*] к уравнению (1), описывает частицу, масса которой совпадает с массой электрона, но отличающуюся от электрона знаком электрического заряда, – позитрон. Затем было установлено, что каждой фундаментальной частице соответствует фундаментальная античастица, обладающая той же массой, но противоположными по знаку зарядовыми квантовыми числами. В предыдущей лекции мы показали, что алгебраический подход позволяет утверждать пригодность уравнения Дирака для описания лептонов и ставит под сомнение возможность использования уравнения Дирака для описания кварков. Отсюда можно предположить, что эрмитово сопряженное уравнение Дирака относится к антилептонам. А это обстоятельство в сочетании со стремлением соединить эрмитово сопряженное уравнение Дирака с изложенным нами алгебраическим подходом к квантовым явлениям заставляет нас поставить в соответствие волновым функциям антилептонов векторы и алгебры определенного вида.

Итак, начнем с того, что приведем эрмитово сопряженное[†] уравнение Дирака[‡], предназначенное прежде всего для описания поведения позитрона

$${}^{+}\psi_{\beta}\cdot\left({}^{+}\gamma^{\beta}{}_{\alpha i}\,\overleftarrow{\partial}^{i} + \frac{m_e\,c}{\hbar}\,{}^{+}\gamma^{\beta}{}_{\alpha 0}\right) = 0\,. \tag{2}$$

Здесь

- ${}^{+}\gamma_0$ – единичная матрица.

$${}^{+}\gamma_0 = \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right|$$

- ${}^{+}\gamma_k$ – четыре матрицы, эрмитово сопряженные к образующим матрицам алгебры Дирака

$${}^{+}\gamma_1 = i\left|\begin{array}{cc|cc} & & & -1 \\ & & -1 & \\ \hline & 1 & & \\ 1 & & & \end{array}\right|, \qquad {}^{+}\gamma_2 = i\left|\begin{array}{cc|cc} & & & i \\ & & -i & \\ \hline & -i & & \\ i & & & \end{array}\right|$$

$${}^{+}\gamma_3 = i\left|\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & -1 \\ \hline -1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right|, \qquad {}^{+}\gamma_4 = i\left|\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right|$$

Волновая функция позитрона представлена строкой из четырех комплексных компонент

$${}^{+}\psi_{\beta} \sim {}^{+}\psi = \left|\,{}^{+}\psi_1\,,\,{}^{+}\psi_2\,,\,{}^{+}\psi_3\,,\,{}^{+}\psi_4\,\right|, \tag{3}$$

где[§]

$$\begin{array}{ll} {}^{+}\psi_1 = \varphi^1 - i\,\chi^1\,, & {}^{+}\psi_2 = \varphi^2 - i\,\chi^2\,, \\ {}^{+}\psi_3 = \varphi^3 - i\,\chi^3\,, & {}^{+}\psi_4 = \varphi^4 - i\,\chi^4\,. \end{array} \tag{4}$$

---

[*] Эрмитово сопряжение произвольной комплексной матрицы сводится к ее транспонированию (замене строк столбцами и наоборот) и переходу от комплексных величин к комплексно сопряженным.

[†] Эрмитово сопряженную величину будем обозначать значком $^{+}$ слева от символа самой величины, имея в виду, что правое поле от указанного символа часто используется для размещения индексов. Например, запись ${}^{+}A^{I}{}_{K}$ обозначает эрмитово сопряженную матрицу по отношению к матрице $A^{I}{}_{K}$. Это обозначение несколько отличается от общепринятого, но более удобно.

[‡] При переходе от уравнения (1) к эрмитово сопряженному уравнению учтено, что

$${}^{+}(A\cdot B) = {}^{+}B\cdot{}^{+}A\,.$$

[§] Эрмитово сопряжение скалярной комплексной величины сводится к ее комплексному сопряжению.

Операторы $\overleftarrow{\partial}^{i}$ есть операторы частного дифференцирования по геометрическим координатам** x_1, x_2, x_3 и времени $x_4 = c\,t$

$$\overleftarrow{\partial}^{i} = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_i} \sim \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_1}, \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_2}, \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_3}, \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_4} = \frac{\overleftarrow{\partial}}{c\,\partial t} \right) .$$

Эти операторы действуют на волновую функцию, стоящую слева.

Приведенные уравнения записаны в комплексной форме. Индексы α, β принимают значения $1, \ldots, 4$ в соответствии с нумерацией компонент волновой функции. Однако нужно иметь в виду, что используемая здесь нумерация не имеет отношения к той нумерации компонент, которая будет введена далее в алгебре действия антилептонов.

Кроме комплексной формы уравнение Дирака может быть записано в *спинорной* форме. Для этого необходимо строку ${}^{+}\psi$ из четырех компонент заменить на строку из двух компонент

$${}^{+}\psi = \left|\ {}^{+}\xi\, , {}^{+}\eta\ \right| .$$

Каждая из компонент ${}^{+}\xi$ и ${}^{+}\eta$ является двухкомпонентной функцией

$${}^{+}\xi = \left|\ \varphi^1 - i\,\chi^1\, , \varphi^2 - i\,\chi^2\ \right| ,$$

$${}^{+}\eta = \left|\ \varphi^3 - i\,\chi^3\, , \varphi^4 - i\,\chi^4\ \right| .$$

Каждая из величин ${}^{+}\xi$ и ${}^{+}\eta$ определяется как *спинор*. При этом волновая функция выступает как *биспинор*. Спинорной форме эрмитово сопряженного уравнения Дирака соответствуют зрмитово сопряженные матрицы Дирака размерности 2×2, в которых по прежнему использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\ , \quad \sigma_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\ , \quad \sigma_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline & -i \\ \hline i & \\ \hline\end{array}\ , \quad \sigma_3 = \begin{array}{|c|c|}\hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\ .$$

После обозначения указанных блоков получим эрмитово сопряженные матрицы Дирака в следующем виде:

- ${}^{+}\gamma_0 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}$,

- ${}^{+}\gamma_k$ – четыре матрицы, эрмитово сопряженные к образующим матрицам алгебры Дирака

$${}^{+}\gamma_1 = i \begin{array}{|c|c|}\hline & -\sigma_1 \\ \hline \sigma_1 & \\ \hline\end{array}\ , \qquad {}^{+}\gamma_2 = i \begin{array}{|c|c|}\hline & -\sigma_2 \\ \hline \sigma_2 & \\ \hline\end{array}\ ,$$

$${}^{+}\gamma_3 = i \begin{array}{|c|c|}\hline & -\sigma_3 \\ \hline \sigma_3 & \\ \hline\end{array}\ , \qquad {}^{+}\gamma_4 = i \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\ .$$

Спинорная форма эрмитово сопряженного уравнения Дирака в матричном виде*:

$$\left|\, {}^{+}\xi\ {}^{+}\eta \,\right| \left(i \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\ \overleftarrow{\partial}^{4} + i \begin{array}{|c|c|}\hline & -\sigma_a \\ \hline \sigma_a & \\ \hline\end{array}\ \overleftarrow{\partial}^{a} + \frac{m_e\, c}{\hbar} \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array} \right) = 0$$

II. АЛГЕБРА ЭРМИТОВО СОПРЯЖЕННЫХ МАТРИЦ ДИРАКА.

Вышеуказанные матрицы позволяют построить алгебру эрмитово сопряженных матриц Дирака с шестнадцатью базисными матрицами ${}^{+}\gamma_I$. Здесь индекс I по прежнему принимает значения от 0 до 15. Приведем эти матрицы и укажем их свойства.

- Единичная матрица ${}^{+}\gamma_0$.

$${}^{+}\gamma_0 = \begin{array}{|cc|cc|}\hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}$$

- Четыре образующих матрицы ${}^{+}\gamma_k$, где индекс k принимает значения от 1 до 4.

$${}^{+}\gamma_1 = i \begin{array}{|cc|cc|}\hline & & & -1 \\ & & -1 & \\ \hline & 1 & & \\ 1 & & & \\ \hline\end{array} = i \begin{array}{|c|c|}\hline & -\sigma_1 \\ \hline \sigma_1 & \\ \hline\end{array}$$

$${}^{+}\gamma_2 = i \begin{array}{|cc|cc|}\hline & & & i \\ & & -i & \\ \hline & -i & & \\ i & & & \\ \hline\end{array} = i \begin{array}{|c|c|}\hline & -\sigma_2 \\ \hline \sigma_2 & \\ \hline\end{array}$$

$${}^{+}\gamma_3 = i \begin{array}{|cc|cc|}\hline & & 1 & \\ & & & -1 \\ \hline -1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline\end{array} = i \begin{array}{|c|c|}\hline & -\sigma_3 \\ \hline \sigma_3 & \\ \hline\end{array}$$

$${}^{+}\gamma_4 = i \begin{array}{|cc|cc|}\hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline\end{array} = i \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}$$

Для них имеют место соотношения

$$\begin{aligned} {}^{+}\gamma_1 \cdot {}^{+}\gamma_1 &= {}^{+}\gamma_0\, , \qquad {}^{+}\gamma_2 \cdot {}^{+}\gamma_2 = {}^{+}\gamma_0\, , \\ {}^{+}\gamma_3 \cdot {}^{+}\gamma_3 &= {}^{+}\gamma_0\, , \qquad {}^{+}\gamma_4 \cdot {}^{+}\gamma_4 = -{}^{+}\gamma_0\, . \end{aligned} \qquad (5)$$

С помощью матриц ${}^{+}\gamma_k$ путем умножения их друг на друга образуются остальные одиннадцать матриц.

**Здесь полагается $x_i = \delta_{ik}\, x^k$.

*Здесь как и прежде латинские индексы a, b, c, d, пробегают значения от 1 до 3.

- Шесть матриц

$$ {}^{+}\gamma_{ik} = {}^{+}\gamma_i \cdot {}^{+}\gamma_k \,. \tag{6} $$

Здесь $i \neq k$.

$$ {}^{+}\gamma_{21} = i \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & -1 & \\ & & & 1 \end{array}\right) = i \left(\begin{array}{c|c} \sigma_3 & \\ \hline & \sigma_3 \end{array}\right) $$

$$ {}^{+}\gamma_{13} = i \left(\begin{array}{cc|cc} & -i & & \\ i & & & \\ \hline & & & -i \\ & & i & \end{array}\right) = i \left(\begin{array}{c|c} \sigma_2 & \\ \hline & \sigma_2 \end{array}\right) $$

$$ {}^{+}\gamma_{32} = i \left(\begin{array}{cc|cc} & 1 & & \\ 1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & 1 & \end{array}\right) = i \left(\begin{array}{c|c} \sigma_1 & \\ \hline & \sigma_1 \end{array}\right) $$

$$ {}^{+}\gamma_{14} = \left(\begin{array}{cc|cc} & 1 & & \\ 1 & & & \\ \hline & & & -1 \\ & & -1 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \sigma_1 & \\ \hline & -\sigma_1 \end{array}\right) $$

$$ {}^{+}\gamma_{42} = \left(\begin{array}{cc|cc} & i & & \\ -i & & & \\ \hline & & & -i \\ & & i & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} -\sigma_2 & \\ \hline & \sigma_2 \end{array}\right) $$

$$ {}^{+}\gamma_{34} = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \sigma_3 & \\ \hline & -\sigma_3 \end{array}\right) $$

Для этих матриц выполняется правило перестановки индексов и, соответственно, матриц-сомножителей – условие антикоммутативности

$$ {}^{+}\gamma_{ik} = -{}^{+}\gamma_{ki} \,. \tag{7} $$

Возведение в квадрат матриц ${}^{+}\gamma_{ik}$ приводит к следующим соотношениям

$$ \begin{aligned} {}^{+}\gamma_{21} \cdot {}^{+}\gamma_{21} &= -{}^{+}\gamma_0 \,, & {}^{+}\gamma_{42} \cdot {}^{+}\gamma_{42} &= {}^{+}\gamma_0 \,, \\ {}^{+}\gamma_{32} \cdot {}^{+}\gamma_{32} &= -{}^{+}\gamma_0 \,, & {}^{+}\gamma_{14} \cdot {}^{+}\gamma_{14} &= {}^{+}\gamma_0 \,, \\ {}^{+}\gamma_{13} \cdot {}^{+}\gamma_{13} &= -{}^{+}\gamma_0 \,, & {}^{+}\gamma_{34} \cdot {}^{+}\gamma_{34} &= {}^{+}\gamma_0 \,. \end{aligned} \tag{8} $$

- Четыре матрицы

$$ {}^{+}\gamma_{ikl} = {}^{+}\gamma_i \cdot {}^{+}\gamma_k \cdot {}^{+}\gamma_l \,, \quad (i \neq k,\, i \neq l,\, k \neq l) \,. \tag{9} $$

$$ {}^{+}\gamma_{123} = \left(\begin{array}{cc|cc} & & -1 & \\ & & & -1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} & -1 \\ \hline 1 & \end{array}\right) $$

$$ {}^{+}\gamma_{124} = \left(\begin{array}{cc|cc} & & -1 & \\ & & & 1 \\ \hline -1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} & \sigma_3 \\ \hline \sigma_3 & \end{array}\right) $$

$$ {}^{+}\gamma_{134} = \left(\begin{array}{cc|cc} & & & i \\ & & -i & \\ \hline & i & & \\ -i & & & \end{array}\right) = (-1) \left(\begin{array}{c|c} & \sigma_2 \\ \hline \sigma_2 & \end{array}\right) $$

$$ {}^{+}\gamma_{234} = \left(\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ 1 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} & \sigma_1 \\ \hline \sigma_1 & \end{array}\right) $$

Для этих матриц выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, матриц-сомножителей, вытекающие из условий ассоциативности и антикоммутативности

$$ \begin{gathered} {}^{+}\gamma_{ikl} = {}^{+}\gamma_{kli} = {}^{+}\gamma_{lik} = \\ -{}^{+}\gamma_{kil} = -{}^{+}\gamma_{ilk} = -{}^{+}\gamma_{lki} \,. \end{gathered} \tag{10} $$

Возведение в квадрат матриц ${}^{+}\gamma_{ikl}$ приводит к следующим соотношениям

$$ \begin{aligned} {}^{+}\gamma_{123} \cdot {}^{+}\gamma_{123} &= -{}^{+}\gamma_0 \,, \\ {}^{+}\gamma_{124} \cdot {}^{+}\gamma_{124} &= {}^{+}\gamma_0 \,, \\ {}^{+}\gamma_{134} \cdot {}^{+}\gamma_{134} &= {}^{+}\gamma_0 \,, \\ {}^{+}\gamma_{234} \cdot {}^{+}\gamma_{234} &= {}^{+}\gamma_0 \,. \end{aligned} \tag{11} $$

- Матрица

$$ {}^{+}\gamma_{1324} = {}^{+}\gamma_1 \cdot {}^{+}\gamma_3 \cdot {}^{+}\gamma_2 \cdot {}^{+}\gamma_4 \,. \tag{12} $$

$$ {}^{+}\gamma_{1324} = i \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & & & \\ & -1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right) = i \left(\begin{array}{c|c} -1 & \\ \hline & 1 \end{array}\right) $$

Для этой матрицы выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, матриц-сомножителей, вытекающие из условий ассоциативности и антикоммутативности

$$ \begin{gathered} {}^{+}\gamma_{1324} = {}^{+}\gamma_{1243} = {}^{+}\gamma_{1432} = -{}^{+}\gamma_{1234} = \\ -{}^{+}\gamma_{1342} = -{}^{+}\gamma_{1423} = -{}^{+}\gamma_{3241} = -{}^{+}\gamma_{3412} = \\ -{}^{+}\gamma_{3124} = {}^{+}\gamma_{3421} = {}^{+}\gamma_{3214} = {}^{+}\gamma_{3142} = \\ {}^{+}\gamma_{2413} = {}^{+}\gamma_{2134} = {}^{+}\gamma_{2341} = -{}^{+}\gamma_{2143} = \\ -{}^{+}\gamma_{2431} = -{}^{+}\gamma_{2314} = {}^{+}\gamma_{4132} = -{}^{+}\gamma_{4321} = \\ -{}^{+}\gamma_{4213} = {}^{+}\gamma_{4312} = {}^{+}\gamma_{4123} = {}^{+}\gamma_{4231} \,. \end{gathered} \tag{13} $$

Возведение в квадрат матрицы ${}^{+}\gamma_{1324}$ дает

$$ {}^{+}\gamma_{1324} \cdot {}^{+}\gamma_{1324} = -{}^{+}\gamma_0 \,. \tag{14} $$

Соотношения (5)–(14) показывают, что эрмитово сопряженная алгебра Дирака есть алгебра Клиффорда, построенная на образующих матрицах

$$ {}^{+}\gamma_1 \,, \quad {}^{+}\gamma_2 \,, \quad {}^{+}\gamma_3 \,, \quad {}^{+}\gamma_4 \,. $$

III. КОНТРАВАРИАНТНАЯ СОПРЯЖЕННАЯ АЛГЕБРА КЛИФФОРДА.

В соответствии с нашей программой будем полагать, что эрмитово сопряженные матрицы Дирака являются структурными матрицами алгебры действия антилептонов. Отсюда следует, что алгебру действия антилептонов необходимо рассматривать как контравариантную алгебру Клиффорда. Поэтому алгебру действия антилептонов будем называть контравариантной сопряженной алгеброй Клиффорда и обозначать ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}$. Базисные векторы для ковариантной сопряженной алгебры Клиффорда будем обозначать $\mathcal{E}_I$.

Зададим закон умножения базисных векторов в контравариантной сопряженной алгебре Клиффорда ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}$ следующим образом:

$$\mathcal{E}_I \circ \mathcal{E}_K = \mathcal{E}_L \cdot {}^{+}C^{L}{}_{KI}\,. \tag{15}$$

где ${}^{+}C^{L}{}_{KI}$ есть структурные постоянные контравариантной сопряженной алгебры Клиффорда ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}$.

Здесь необходимо отметить, что введенный в настоящем разделе термин "сопряженный"и символ $^{+}$ нужно считать никак не связанными с понятием "эрмитово сопряженный"и соответствующим символом, приведенными в предыдущих разделах, до тех пор, пока мы не докажем, что векторы и матрицы вводимой алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}$ в комплексном представлении являются эрмитово сопряженными по отношению к алгебре $\widetilde{\mathbb{C}}$. В этом, собственно, и состоит наша задача.

Итак в соответствии с принятой нами программой мы имеем алгебру Клиффорда, построенную на шестнадцати базисных векторах $\mathcal{E}_I$, где индекс I пробегает значения от 0 до 15. Укажем эти векторы и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\mathcal{E}_0$. Для него имеет место правило умножения

$$\mathcal{E}_0 \circ \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0\,.$$

- $\mathcal{E}_i$, где индекс i пробегает значения от 1 до 4. То есть, число таких векторов равно четырем. Эти векторы являются образующими. Для них имеют место правила умножения

$$\mathcal{E}_i \circ \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0 \circ \mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i\,,$$

$$\mathcal{E}_i \circ \mathcal{E}_i = \operatorname{sign} \mathcal{E}_i\,,$$

где

$$\operatorname{sign} \mathcal{E}_1 = \operatorname{sign} \mathcal{E}_2 = \operatorname{sign} \mathcal{E}_3 = -\operatorname{sign} \mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_0\,.$$

- Векторы

$$\mathcal{E}_{ik} = \mathcal{E}_i \circ \mathcal{E}_k\,.$$

Здесь $i \neq k$. Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6\,.$$

Для этих векторов выполняется правило перестановки индексов и, соответственно, сомножителей – условие антикоммутативности

$$\mathcal{E}_{ik} = -\mathcal{E}_{ki}\,.$$

Остальные правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условий ассоциативности и антикоммутативности. В частности,

$$\mathcal{E}_{ik} \circ \mathcal{E}_{ik} = -\mathcal{E}_i \circ (\mathcal{E}_k \circ \mathcal{E}_k) \circ \mathcal{E}_i = -\operatorname{sign} \mathcal{E}_i \circ \operatorname{sign} \mathcal{E}_k\,.$$

- Векторы

$$\mathcal{E}_{ikl} = \mathcal{E}_i \circ \mathcal{E}_k \circ \mathcal{E}_l\,.$$

Здесь

$$i \neq k\,, i \neq l\,, k \neq l\,.$$

Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4\,.$$

Для этих векторов выполняется правило перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающее из условий ассоциативности и антикоммутативности

$$\mathcal{E}_{ikl} = \mathcal{E}_{kli} = \mathcal{E}_{lik} = -\mathcal{E}_{kil} = -\mathcal{E}_{ilk} = -\mathcal{E}_{lki}\,.$$

Остальные правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условий ассоциативности и антикоммутативности. В частности,

$$\mathcal{E}_{ikl} \circ \mathcal{E}_{ikl} = -\mathcal{E}_i \circ (\mathcal{E}_k \circ (\mathcal{E}_l \circ \mathcal{E}_l) \circ \mathcal{E}_k) \circ \mathcal{E}_i = \\ -\operatorname{sign} \mathcal{E}_i \circ \operatorname{sign} \mathcal{E}_k \circ \operatorname{sign} \mathcal{E}_l\,.$$

- Вектор

$$\mathcal{E}_{iklm} = \mathcal{E}_i \circ \mathcal{E}_k \circ \mathcal{E}_l \circ \mathcal{E}_m\,.$$

Здесь

$$i \neq k\,, i \neq l\,, i \neq m\,, k \neq l\,, k \neq m\,, l \neq m\,.$$

Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по четыре, то есть единице

$$C_4^4 = 1\,.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающее из условий ассоциативности и антикоммутативности

$$\begin{gathered}\mathcal{E}_{iklm} = \mathcal{E}_{ilmk} = \mathcal{E}_{imkl} = -\mathcal{E}_{ilkm} = \\ -\mathcal{E}_{ikml} = -\mathcal{E}_{imlk} = -\mathcal{E}_{klmi} = -\mathcal{E}_{kmil} = \\ -\mathcal{E}_{kilm} = \mathcal{E}_{kmli} = \mathcal{E}_{klim} = \mathcal{E}_{kiml} = \\ \mathcal{E}_{lmik} = \mathcal{E}_{likm} = \mathcal{E}_{lmki} = -\mathcal{E}_{limk} = \\ -\mathcal{E}_{lmki} = -\mathcal{E}_{lkim} = -\mathcal{E}_{mikl} = -\mathcal{E}_{mkli} = \\ -\mathcal{E}_{mlik} = \mathcal{E}_{mkil} = \mathcal{E}_{milk} = \mathcal{E}_{mlki}\,.\end{gathered}$$

Остальные правила умножения, в которых участвуют этот вектор, следуют из условий ассоциативности и антикоммутативности. В частности,

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}_{iklm} \circ \mathcal{E}_{iklm} = \\ &\mathcal{E}_i \circ (\mathcal{E}_k \circ (\mathcal{E}_l \circ (\mathcal{E}_m \circ \mathcal{E}_m) \circ \mathcal{E}_l) \circ \mathcal{E}_k) \circ \mathcal{E}_i = \\ &\operatorname{sign}\mathcal{E}_i \circ \operatorname{sign}\mathcal{E}_k \circ \operatorname{sign}\mathcal{E}_l \circ \operatorname{sign}\mathcal{E}_m\,.\end{aligned}$$

Как и прежде в том случае, когда необходимо подчеркнуть размерность образующего пространства алгебры Клиффорда, мы по прежнему будем использовать обозначение ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4$ вместо обозначения ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}$. Это особенно полезно при выделении подалгебры алгебры Клиффорда. Например, подалгебру с тремя образующими базисными векторами (например, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$), удобно обозначать ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_3$.

В соответствии с нашим общим замыслом мы должны для указанных базисных векторов $\mathcal{E}_I$, пользуясь правилами умножения векторов в алгебре Клиффорда, найти из (15) структурные матрицы ${}^{+}C^{L}{}_{KI}$ и показать, что эти матрицы связаны со структурными матрицами $C^{IK}{}_{L}$ алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}$ некоторой операцией "сопряжения", которая в комплексном представлении должна сводиться к эрмитовому сопряжению.

IV. РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОНТРАВАРИАНТНОЙ СОПРЯЖЕННОЙ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА

Далее рассмотрим соответствие между базисными векторами алгебры Клиффорда ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}$ и ее структурными матрицами. Для этого запишем условие ассоциативности для произведения трех базисных векторов

$$\mathcal{E}_I \circ (\mathcal{E}_K \circ \mathcal{E}_N) = (\mathcal{E}_I \circ \mathcal{E}_K) \circ \mathcal{E}_N\,.$$

Отсюда, используя закон умножения базисных векторов, получим

$$(\mathcal{E}_I \circ \mathcal{E}_L)\, {}^{+}C^{L}{}_{NK} = (\mathcal{E}_L \circ \mathcal{E}_N)\, {}^{+}C^{L}{}_{KI}\,.$$

Откуда

$${}^{+}C^{M}{}_{LI} \cdot {}^{+}C^{L}{}_{NK} = {}^{+}C^{M}{}_{NL} \cdot {}^{+}C^{L}{}_{KI}\,. \tag{16}$$

Сравнивая это выражение с самим законом умножения базисных векторов (15), заключаем, что базисным векторам $\mathcal{E}_I$ можно поставить в соответствие структурные матрицы ${}^{+}C^{L}{}_{KI}$. При этом $\circ$ – умножению базисных векторов ставится в соответствие обычное умножение матриц в *том же* порядке. Это соответствие называется *регулярным (присоединенным) представлением* алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}$ и обозначается:

$$\mathcal{E}_I \sim {}^{+}C^{L}{}_{KI}\,.$$

Номер структурной матрицы I есть индекс базисного вектора, который представлен этой матрицей. В регулярном представлении произвольному вектору алгебры ${}^{+}\tilde{S} = \mathcal{E}_I\, S^I$ соответствует матрица

$${}^{+}\tilde{S}^{L}{}_{K} = {}^{+}C^{L}{}_{KI} \cdot S^I\,.$$

1. Действительное представление

Из (15) следует алгоритм вычисления структурных матриц, соответствующих базисным векторам. Сначала нужно установить номер структурной матрицы (I) в соответствии с номером базисного вектора, затем для каждого столбца матрицы (K) проделать следующие вычисления. Базисный вектор $\mathcal{E}_K$, номер которого совпадает с номером *столбца* матрицы, нужно умножить *слева* на базисный вектор $\mathcal{E}_I$, номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор $\mathcal{E}_L$, на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер (L) указанного базисного вектора определит номер строки, на пересечении которой с рассматриваемым столбцом, необходимо поставить указанное численное значение проекции.

Теперь вычислим структурные матрицы ${}^{+}C^{L}{}_{KI}$ по приведенному алгоритму для двух случаев

1. подалгебра ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_3$ с тремя образующими базисными векторами $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$;

2. алгебра ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4$ с четырьмя образующими базисными векторами $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}_4$.

Для подалгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_3$ будем вычислять структурные матрицы для особого порядка индексов:[*]

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123)\,.$$

[*]Приведенный порядок индексов оправдан тем, что для него структурные матрицы контравариантной сопряженной алгебры Клиффорда представлены эрмитово сопряженными матрицами Дирака (см. Раздел II).

То есть, будем записывать слагаемые вектора ${}^{+}\tilde{S}$ в следующей последовательности

$$
\begin{aligned}
{}^{+}\tilde{S} = \mathcal{E}_{32}\, S^{32} + \mathcal{E}_{13}\, S^{13} + \mathcal{E}_{21}\, S^{21} + \mathcal{E}_{0}\, S^{0} + \\
\mathcal{E}_{1}\, S^{1} + \mathcal{E}_{2}\, S^{2} + \mathcal{E}_{3}\, S^{3} + \mathcal{E}_{123}\, S^{123}\,.
\end{aligned}
$$

В результате получим действительные структурные матрицы 8×8 представления базисных векторов $\mathcal{E}_K$. (См. Раздел V).

Для алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4$ будем вычислять структурные матрицы для особого порядка индексов, обобщающего предыдущий порядок индексов,

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124)\,.$$

То есть, будем записывать слагаемые вектора S в следующей последовательности

$$
\begin{aligned}
{}^{+}\tilde{S} = \mathcal{E}_{32}\, S^{32} + \mathcal{E}_{13}\, S^{13} + \mathcal{E}_{21}\, S^{21} + \mathcal{E}_{0}\, S^{0} + \\
\mathcal{E}_{42}\, S^{42} + \mathcal{E}_{14}\, S^{14} + \mathcal{E}_{1324}\, S^{1324} + \mathcal{E}_{34}\, S^{34} + \\
\mathcal{E}_{1}\, S^{1} + \mathcal{E}_{2}\, S^{2} + \mathcal{E}_{3}\, S^{3} + \mathcal{E}_{123}\, S^{123} + \\
\mathcal{E}_{134}\, S^{134} + \mathcal{E}_{234}\, S^{234} + \mathcal{E}_{4}\, S^{4} + \mathcal{E}_{124}\, S^{124}\,.
\end{aligned}
$$

В результате получим действительные матрицы 16×16 представления базисных векторов $\mathcal{E}_K$. (См. Раздел V).

Помимо действительного представления будем использовать *комплексное* и *кватернионное* представления базисных векторов алгебры Клиффорда, удобные в силу своей компактности.

2. Комплексное представление

1. подалгебра ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_3$.

Комплексное представление основано на следующем разложении вектора:

$$
\begin{aligned}
{}^{+}\tilde{S} = \mathcal{E}_{13} \circ (\mathcal{E}_{21}\, S^{32} + \mathcal{E}_{0}\, S^{13}) + \mathcal{E}_{0} \circ (\mathcal{E}_{21}\, S^{21} + \mathcal{E}_{0}\, S^{0}) + \\
\mathcal{E}_{2} \circ (\mathcal{E}_{21}\, S^{1} + \mathcal{E}_{0}\, S^{2}) + \mathcal{E}_{123} \circ (\mathcal{E}_{21}\, S^{3} + \mathcal{E}_{0}\, S^{123})\,.
\end{aligned}
$$

Это представление соответствует записи алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_3$ в виде произведения ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_2 \times {}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_1$ (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_3$ являются

$$\mathcal{E}_{13}, \quad \mathcal{E}_{0}, \quad \mathcal{E}_{2}, \quad \mathcal{E}_{123}\,;$$

базисными векторами алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_1$ являются

$$\mathcal{E}_{21}, \quad \mathcal{E}_{0}\,.$$

Пространство ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_1$ можно рассматривать как пространство комплексных чисел. Для этого базисному вектору $\mathcal{E}_{21}$ алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_1$ поставим в соответствие мнимую единицу i, имея в виду, что $(\mathcal{E}_{21})^2 = -1$, а базисному вектору $\mathcal{E}_0$ алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_1$ поставим в соответствие действительную единицу

$$\mathcal{E}_{21} \sim i, \quad \mathcal{E}_{0} \sim 1\,.$$

В результате получим вектор алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_3$ в комплексном представлении:

$$
\begin{aligned}
{}^{+}\tilde{S} = \mathcal{E}_{13} \circ (i\, S^{32} + S^{13}) + \mathcal{E}_{0} \circ (i\, S^{21} + S^{0}) + \\
\mathcal{E}_{2} \circ (i\, S^{1} + S^{2}) + \mathcal{E}_{123} \circ (i\, S^{3} + S^{123})\,.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Таким образом, в комплексном представлении координаты (компоненты) вектора являются комплексными. Введем для них обозначение

$$
\begin{aligned}
{}^{+}\tilde{S}^{13} &= i\, S^{32} + S^{13}\,, \qquad & {}^{+}\tilde{S}^{0} &= i\, S^{21} + S^{0}\,, \\
{}^{+}\tilde{S}^{2} &= i\, S^{1} + S^{2}\,, \qquad & {}^{+}\tilde{S}^{123} &= i\, S^{3} + S^{123}\,.
\end{aligned} \tag{18}
$$

С учетом этого вектор S можно записать

$${}^{+}\tilde{S} = \mathcal{E}_{13}\, {}^{+}\tilde{S}^{13} + \mathcal{E}_{0}\, {}^{+}\tilde{S}^{0} + \mathcal{E}_{2}\, {}^{+}\tilde{S}^{2} + \mathcal{E}_{123}\, {}^{+}\tilde{S}^{123}\,.$$

Отсюда видно, что в комплексном представлении вектор S проецируется на направления $\mathcal{E}_{13}$, $\mathcal{E}_{0}$, $\mathcal{E}_{2}$, $\mathcal{E}_{123}$.

Комплексное представление базисных векторов дается структурными матрицами 4×4 (см. Раздел V).

2. алгебра ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4$.

Комплексное представление в этом случае основано на следующем разложении вектора:

$$
\begin{aligned}
{}^{+}\tilde{S} = \mathcal{E}_{13} \circ (\mathcal{E}_{21}\, S^{32} + \mathcal{E}_{0}\, S^{13}) + \mathcal{E}_{0} \circ (\mathcal{E}_{21}\, S^{21} + \mathcal{E}_{0}\, S^{0}) + \\
\mathcal{E}_{14} \circ (\mathcal{E}_{21}\, S^{42} + \mathcal{E}_{0}\, S^{14}) + \mathcal{E}_{34} \circ (\mathcal{E}_{21}\, S^{1324} + \mathcal{E}_{0}\, S^{34}) + \\
\mathcal{E}_{2} \circ (\mathcal{E}_{21}\, S^{1} + \mathcal{E}_{0}\, S^{2}) + \mathcal{E}_{123} \circ (\mathcal{E}_{21}\, S^{3} + \mathcal{E}_{0}\, S^{123}) + \\
\mathcal{E}_{234} \circ (\mathcal{E}_{21}\, S^{134} + \mathcal{E}_{0}\, S^{234}) + \mathcal{E}_{124} \circ (\mathcal{E}_{21}\, S^{4} + \mathcal{E}_{0}\, S^{124})\,,
\end{aligned}
$$

Это представление соответствует записи алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4$ в виде произведения ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_3 \times {}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_1$ (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_3$ являются

$$\mathcal{E}_{13},\ \mathcal{E}_{0},\ \mathcal{E}_{14},\ \mathcal{E}_{34},\ \mathcal{E}_{2},\ \mathcal{E}_{123},\ \mathcal{E}_{234},\ \mathcal{E}_{124}\,;$$

базисными векторами алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_1$ являются

$$\mathcal{E}_{21}, \quad \mathcal{E}_{0}\,.$$

Как и прежде поставим в соответствие базисному вектору $\mathcal{E}_{21}$ алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_1$ мнимую единицу i, имея в виду, что $(\mathcal{E}_{21})^2 = -1$, а базисному вектору $\mathcal{E}_0$ алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_1$ действительную единицу. В результате получим вектор алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4$ в комплексном представлении:

$$
\begin{aligned}
{}^{+}\tilde{S} = \mathcal{E}_{13}\circ(i\,S^{32}+S^{13})+\mathcal{E}_{0}\circ(i\,S^{21}+S^{0})+\\
\mathcal{E}_{14}\circ(i\,S^{42}+S^{14})+\mathcal{E}_{34}\circ(i\,S^{1324}+S^{34})+\\
\mathcal{E}_{2}\circ(i\,S^{1}+S^{2})+\mathcal{E}_{123}\circ(i\,S^{3}+S^{123})+\\
\mathcal{E}_{234}\circ(i\,S^{134}+S^{234})+\mathcal{E}_{124}\circ(i\,S^{4}+S^{124})\,.
\end{aligned}
$$

Таким образом, в комплексном представлении координаты вектора являются комплексными. Введем для них обозначение

$$
\begin{aligned}
{}^{+}\tilde{S}^{13} &= i\,S^{32}+S^{13}\,, & {}^{+}\tilde{S}^{0} &= i\,S^{21}+S^{0}\,,\\
{}^{+}\tilde{S}^{14} &= i\,S^{42}+S^{14}\,, & {}^{+}\tilde{S}^{34} &= i\,S^{1324}+S^{34}\,,\\
{}^{+}\tilde{S}^{2} &= i\,S^{1}+S^{2}\,, & {}^{+}\tilde{S}^{123} &= i\,S^{3}+S^{123}\,,\\
{}^{+}\tilde{S}^{234} &= i\,S^{134}+S^{234}\,, & {}^{+}\tilde{S}^{124} &= i\,S^{4}+S^{124}\,.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

С учетом этого вектор ${}^{+}\tilde{S}$ можно записать

$$
\begin{aligned}
{}^{+}\tilde{S} = \mathcal{E}_{13}\,{}^{+}\tilde{S}^{13}+\mathcal{E}_{0}\,{}^{+}\tilde{S}^{0}+\mathcal{E}_{14}\,{}^{+}\tilde{S}^{14}+\mathcal{E}_{34}\,{}^{+}\tilde{S}^{34}+\\
\mathcal{E}_{2}\,{}^{+}\tilde{S}^{2}+\mathcal{E}_{123}\,{}^{+}\tilde{S}^{123}+\mathcal{E}_{234}\,{}^{+}\tilde{S}^{234}+\mathcal{E}_{124}\,{}^{+}\tilde{S}^{124}\,.
\end{aligned}
$$

Отсюда видно, что в комплексном представлении вектор ${}^{+}\tilde{S}$ проецируется на направления $\mathcal{E}_{13}$, $\mathcal{E}_{0}$,$\mathcal{E}_{14}$, $\mathcal{E}_{34}$, $\mathcal{E}_{2}$, $\mathcal{E}_{123}$, $\mathcal{E}_{234}$, $\mathcal{E}_{124}$.

Комплексное представление базисных векторов дается структурными матрицами 8×8 (см. Раздел V).

Как и для лептонов назовем базисный вектор $\mathcal{E}_{21}$ *основным* в связи с тем положением, которое он занимает в комплексном представлении. Связанное с ним комплексное представление поставим в соответствие позитрону. С алгебраической точки зрения направления $\mathcal{E}_{13}$ и $\mathcal{E}_{32}$ эквивалентны направлению $\mathcal{E}_{21}$ и также могут быть приняты за основное. Для того, чтобы отличить эти случаи от предыдущего, будем обозначать мнимую единицу через j, если за основное направление принят вектор $\mathcal{E}_{13}$, и обозначать мнимую единицу через k, если за основное направление принят вектор $\mathcal{E}_{32}$. Первый случай организации комплексного представления поставим в соответствие антимюону. Второй случай организации комплексного представления поставим в соответствие анти-τ-лептону.

3. Кватернионное представление

1. подалгебра ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_3$.

Кватернионное представление подалгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_3$ основано на разложении вектора:

$$
\begin{aligned}
{}^{+}\tilde{S} = (\mathcal{E}_{32}\,S^{32}+\mathcal{E}_{13}\,S^{13}+\mathcal{E}_{21}\,S^{21}+\mathcal{E}_{0}\,S^{0})\circ\mathcal{E}_{0}+\\
(\mathcal{E}_{32}\,S^{1}+\mathcal{E}_{13}\,S^{2}+\mathcal{E}_{21}\,S^{3}+\mathcal{E}_{0}\,S^{123})\circ\mathcal{E}_{123}\,.
\end{aligned}
$$

Это представление соответствует записи алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_3$ в виде произведения ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_1\times{}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_2$. Базисными векторами алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_1$ являются

$$
\mathcal{E}_{0},\qquad \mathcal{E}_{123}\,;
$$

базисными векторами алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_2$ являются

$$
\mathcal{E}_{32},\quad \mathcal{E}_{13},\quad \mathcal{E}_{21},\quad \mathcal{E}_{0}\,.
$$

Последняя алгебра является алгеброй кватернионов, так как

$$
\operatorname{sign}\mathcal{E}_{32}=\operatorname{sign}\mathcal{E}_{13}=\operatorname{sign}\mathcal{E}_{21}=-1\,.
$$

Для базисных кватернионов используем соответственно следующие обозначения

$$
i\cdot\sigma_1,\quad i\cdot\sigma_2,\quad i\cdot\sigma_3,\quad 1\,.
$$

Заменим базисные векторы $\mathcal{E}_{32},\mathcal{E}_{13},\mathcal{E}_{21}$, $\mathcal{E}_{0}$ кватернионами в соответствии

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{32} &\sim i\,\sigma_1\,,\\
\mathcal{E}_{13} &\sim i\,\sigma_2\,,\\
\mathcal{E}_{21} &\sim i\,\sigma_3\,,\\
\mathcal{E}_{0} &\sim 1\,\mathbb{1}\,.
\end{aligned}
$$

В результате получим вектор алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_3$ в кватернионном представлении

$$
\begin{aligned}
{}^{+}\tilde{S} = (i\cdot\sigma_1\,S^{32}+i\cdot\sigma_2\,S^{13}+i\cdot\sigma_3\,S^{21}+S^{0})\circ\mathcal{E}_{0}+\\
(i\cdot\sigma_1\,S^{1}+i\cdot\sigma_2\,S^{2}+i\cdot\sigma_3\,S^{3}+S^{123})\circ\mathcal{E}_{123}\,.
\end{aligned}
$$

Таким образом, в кватернионном представлении координаты вектора являются кватернионами. Введем для них обозначение

$$
\begin{aligned}
{}^{+}\tilde{S}^{0} &= i\cdot\sigma_1\,S^{32}+i\cdot\sigma_2\,S^{13}+i\cdot\sigma_3\,S^{21}+S^{0}\,,\\
{}^{+}\tilde{S}^{123} &= i\cdot\sigma_1\,S^{1}+i\cdot\sigma_2\,S^{2}+i\cdot\sigma_3\,S^{3}+S^{123}\,.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

С учетом этого вектор S можно записать

$$
{}^{+}\tilde{S} = {}^{+}\tilde{S}^{0}\,\mathcal{E}_{0}+{}^{+}\tilde{S}^{123}\,\mathcal{E}_{123}\,.
$$

Отсюда видно, что в кватернионном представлении вектор ${}^{+}\tilde{S}$ проецируется на направления $\mathcal{E}_{0}$, $\mathcal{E}_{123}$.

Кватернионное представление базисных векторов дается структурными матрицами 2×2 (см. Раздел V).

2. алгебра ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4$.

Кватернионное представление алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4$ основано на разложении вектора:

$$
\begin{aligned}
{}^{+}\tilde{S} = (\mathcal{E}_{32}\,S^{32}+\mathcal{E}_{13}\,S^{13}+\mathcal{E}_{21}\,S^{21}+\mathcal{E}_{0}\,S^{0})\circ\mathcal{E}_{0}+\\
(\mathcal{E}_{32}\,S^{42}+\mathcal{E}_{13}\,S^{14}+\mathcal{E}_{21}\,S^{1324}+\mathcal{E}_{0}\,S^{34})\circ\mathcal{E}_{34}+\\
(\mathcal{E}_{32}\,S^{1}+\mathcal{E}_{13}\,S^{2}+\mathcal{E}_{21}\,S^{3}+\mathcal{E}_{0}\,S^{123})\circ\mathcal{E}_{123}+\\
(\mathcal{E}_{32}\,S^{134}+\mathcal{E}_{13}\,S^{234}+\mathcal{E}_{21}\,S^{4}+\mathcal{E}_{0}\,S^{124})\circ\mathcal{E}_{124}\,.
\end{aligned}
$$

Это представление соответствует записи алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4$ в виде произведения ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_2\times{}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_2$. Базисными векторами одной алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_2$ являются

$$
\mathcal{E}_{0},\quad \mathcal{E}_{34},\quad \mathcal{E}_{123},\quad \mathcal{E}_{124}\,;
$$

базисными векторами другой алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_2$ являются

$$\mathcal{E}_{32}, \quad \mathcal{E}_{13}, \quad \mathcal{E}_{21}, \quad \mathcal{E}_0 \,.$$

Заменяя базисные векторы $\mathcal{E}_{32}$, $\mathcal{E}_{13}$, $\mathcal{E}_{21}$, $\mathcal{E}_0$ кватернионами, получим вектор алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_3$ в кватернионном представлении

$$\begin{aligned}{}^{+}\tilde{S} = (i\cdot\sigma_1\, S^{32} + i\cdot\sigma_2\, S^{13} + i\cdot\sigma_3\, S^{21} + S^{0}) \circ \mathcal{E}_0 +\\ (i\cdot\sigma_1\, S^{42} + i\cdot\sigma_2\, S^{14} + i\cdot\sigma_3\, S^{1324} + S^{34}) \circ \mathcal{E}_{34} +\\ (i\cdot\sigma_1\, S^{1} + i\cdot\sigma_2\, S^{2} + i\cdot\sigma_3\, S^{3} + S^{123}) \circ \mathcal{E}_{123} +\\ (i\cdot\sigma_1\, S^{134} + i\cdot\sigma_2\, S^{234} + i\cdot\sigma_3\, S^{4} + S^{124}) \circ \mathcal{E}_{124} \,.\end{aligned}$$

Таким образом, в кватернионном представлении координаты вектора являются кватернионами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned}{}^{+}\tilde{S}^{0} &= i\cdot\sigma_1\, S^{32} + i\cdot\sigma_2\, S^{13} + i\cdot\sigma_3\, S^{21} + S^{0}\,,\\ {}^{+}\tilde{S}^{34} &= i\cdot\sigma_1\, S^{42} + i\cdot\sigma_2\, S^{14} + i\cdot\sigma_3\, S^{1324} + S^{34}\,,\\ {}^{+}\tilde{S}^{123} &= i\cdot\sigma_1\, S^{1} + i\cdot\sigma_2\, S^{2} + i\cdot\sigma_3\, S^{3} + S^{123}\,,\\ {}^{+}\tilde{S}^{124} &= i\cdot\sigma_1\, S^{134} + i\cdot\sigma_2\, S^{234} + i\cdot\sigma_3\, S^{4} + S^{124}\,.\end{aligned} \tag{21}$$

С учетом этого вектор ${}^{+}\tilde{S}$ можно записать

$${}^{+}\tilde{S} = {}^{+}\tilde{S}^{0}\,\mathcal{E}_0 + {}^{+}\tilde{S}^{34}\,\mathcal{E}_{34} + {}^{+}\tilde{S}^{123}\,\mathcal{E}_{123} + {}^{+}\tilde{S}^{124}\,\mathcal{E}_{124}\,.$$

Отсюда видно, что в кватернионном представлении вектор ${}^{+}\tilde{S}$ проецируется на направления $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_{34}$, $\mathcal{E}_{123}$, $\mathcal{E}_{124}$.

Кватернионное представление базисных векторов дается структурными матрицами 4×4 (см. Раздел V).

V. СТРУКТУРНЫЕ МАТРИЦЫ КОНТРАВАРИАНТНОЙ СОПРЯЖЕННОЙ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА.

Приведем структурные матрицы алгебры Клиффорда, которые реализуют регулярное представление базисных векторов:

$$\mathcal{E}_I \sim {}^{+}C^{L}{}_{KI}\,.$$

При преобразовании матриц ${}^{+}C^{L}{}_{KI}$ от действительного представления к комплексному использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$\mathit{1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \qquad \mathit{i} = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline\end{array}\,,$$

что равносильно замене действительных матриц 2×2 вида

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline -b & a \\ \hline\end{array}$$

на комплексные числа.

При преобразовании матриц ${}^{+}C^{L}{}_{KI}$ от комплексного представления к кватернионному использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$\mathbb{1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \quad \sigma_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\,, \quad \sigma_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline & -i \\ \hline i & \\ \hline\end{array}\,, \quad \sigma_3 = \begin{array}{|c|c|}\hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,.$$

Матрицы σ_1, σ_2, σ_3 представляют собой *матрицы Паули* (с той разницей, что по соображениям симметрии в качестве σ_3 взята матрица с противоположным знаком).

3. Подалгебра ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_3$

$$\mathcal{E}_0 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 32&13&21&0&1&2&3&123 \\ \hline 32 & 1&&&&&&& \\ 13 & &1&&&&&& \\ 21 & &&1&&&&& \\ 0 & &&&1&&&& \\ \hline 1 & &&&&1&&& \\ 2 & &&&&&1&& \\ 3 & &&&&&&1& \\ 123 & &&&&&&&1 \\ \hline\end{array} = \mathit{1}\ \begin{array}{|cc|cc|c} 13&0&2&123& \\ \hline 1&&&&13 \\ &1&&&0 \\ \hline &&1&&2 \\ &&&1&123 \\ \hline\end{array} = \mathit{1}\ \begin{array}{|c|c|c} 0&123& \\ \hline \mathbb{1}&&2 \\ \hline &\mathbb{1}&123 \\ \hline\end{array}$$

$$\mathcal{E}_1 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 32&13&21&0&1&2&3&123 \\ \hline 32 & &&&&&&&-1 \\ 13 & &&&&&&1& \\ 21 & &&&&&-1&& \\ 0 & &&&&1&&& \\ \hline 1 & &&&1&&&& \\ 2 & &&-1&&&&& \\ 3 & &1&&&&&& \\ 123 & -1&&&&&&& \\ \hline\end{array} = \mathit{i}\ \begin{array}{|cc|cc|c} 13&0&2&123& \\ \hline &&&-1&13 \\ &&-1&&0 \\ \hline &1&&&2 \\ 1&&&&123 \\ \hline\end{array} = \mathit{i}\ \begin{array}{|c|c|c} 0&123& \\ \hline &-\sigma_1&2 \\ \hline \sigma_1&&123 \\ \hline\end{array}$$

$$\mathcal{E}_2 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 32&13&21&0&1&2&3&123 \\ \hline 32 & &&&&&&-1& \\ 13 & &&&&&&&-1 \\ 21 & &&&&1&&& \\ 0 & &&&&&1&& \\ \hline 1 & &&1&&&&& \\ 2 & &&&1&&&& \\ 3 & -1&&&&&&& \\ 123 & &-1&&&&&& \\ \hline\end{array} = \mathit{i}\ \begin{array}{|cc|cc|c} 13&0&2&123& \\ \hline &&&i&13 \\ &&-i&&0 \\ \hline &-i&&&2 \\ i&&&&123 \\ \hline\end{array} = \mathit{i}\ \begin{array}{|c|c|c} 0&123& \\ \hline &-\sigma_2&2 \\ \hline \sigma_2&&123 \\ \hline\end{array}$$

$$\mathcal{E}_3 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 32&13&21&0&1&2&3&123 \\ \hline 32 & &&&&&1&& \\ 13 & &&&&-1&&& \\ 21 & &&&&&&&-1 \\ 0 & &&&&&&1& \\ \hline 1 & &-1&&&&&& \\ 2 & 1&&&&&&& \\ 3 & &&&1&&&& \\ 123 & &&-1&&&&& \\ \hline\end{array} = \mathit{i}\ \begin{array}{|cc|cc|c} 13&0&2&123& \\ \hline &&1&&13 \\ &&&-1&0 \\ \hline -1&&&&2 \\ &1&&&123 \\ \hline\end{array} = \mathit{i}\ \begin{array}{|c|c|c} 0&123& \\ \hline &-\sigma_3&2 \\ \hline \sigma_3&&123 \\ \hline\end{array}$$

$$\mathcal{E}_{21} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 32&13&21&0&1&2&3&123 \\ \hline 32 & &-1&&&&&& \\ 13 & 1&&&&&&& \\ 21 & &&&1&&&& \\ 0 & &&-1&&&&& \\ \hline 1 & &&&&&-1&& \\ 2 & &&&&1&&& \\ 3 & &&&&&&&1 \\ 123 & &&&&&&-1& \\ \hline\end{array} = \mathit{i}\ \begin{array}{|cc|cc|c} 13&0&2&123& \\ \hline -1&&&&13 \\ &1&&&0 \\ \hline &&-1&&2 \\ &&&1&123 \\ \hline\end{array} = \mathit{i}\ \begin{array}{|c|c|c} 0&123& \\ \hline \sigma_3&&2 \\ \hline &\sigma_3&123 \\ \hline\end{array}$$

$$\mathcal{E}_{13} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & 1 & & & & & \\
13 & & & & 1 & & & & \\
21 & -1 & & & & & & & \\
0 & & -1 & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & 1 & \\
2 & & & & & & & & 1 \\
3 & & & & & -1 & & & \\
123 & & & & & & -1 & & \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & -i & & & 13 \\
i & & & & 0 \\ \hline
 & & & -i & 2 \\
 & & i & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
\sigma_2 & & 2 \\ \hline
 & \sigma_2 & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\mathcal{E}_{32} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & 1 & & & & \\
13 & & & -1 & & & & & \\
21 & & 1 & & & & & & \\
0 & -1 & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & 1 \\
2 & & & & & & & -1 & \\
3 & & & & & & 1 & & \\
123 & & & & & -1 & & & \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & 1 & & & 13 \\
1 & & & & 0 \\ \hline
 & & & 1 & 2 \\
 & & 1 & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
\sigma_1 & & 2 \\ \hline
 & \sigma_1 & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\mathcal{E}_{123} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & & -1 & & & \\
13 & & & & & & -1 & & \\
21 & & & & & & & -1 & \\
0 & & & & & & & & -1 \\ \hline
1 & 1 & & & & & & & \\
2 & & 1 & & & & & & \\
3 & & & 1 & & & & & \\
123 & & & & 1 & & & & \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & -1 & & 13 \\
 & & & -1 & 0 \\ \hline
1 & & & & 2 \\
 & 1 & & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$= 1 \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & -\mathbb{1} & 2 \\ \hline
\mathbb{1} & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

4. Алгебра ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4$

–

$$\mathcal{E}_0 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
13 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
0 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
14 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
34 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
2 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
123 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
234 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
124 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ \hline
\end{array}$$

$$= 1 \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
1 & & & & & & & & 13 \\
 & 1 & & & & & & & 0 \\
 & & 1 & & & & & & 14 \\
 & & & 1 & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & 1 & & & & 2 \\
 & & & & & 1 & & & 123 \\
 & & & & & & 1 & & 234 \\
 & & & & & & & 1 & 124 \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
\mathbb{1} & & & & 0 \\
 & \mathbb{1} & & & 34 \\ \hline
 & & \mathbb{1} & & 123 \\
 & & & \mathbb{1} & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\mathcal{E}_1 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
13 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
21 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
0 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
14 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
1324 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\
34 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\ \hline
1 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
2 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
3 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
123 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
234 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
4 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
124 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & & & -1 & & & 13 \\
 & & & & -1 & & & & 0 \\
 & & & & & & & -1 & 14 \\
 & & & & & & -1 & & 34 \\ \hline
 & 1 & & & & & & & 2 \\
1 & & & & & & & & 123 \\
 & & & 1 & & & & & 234 \\
 & & 1 & & & & & & 124 \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & & -\sigma_1 & & 0 \\
 & & & -\sigma_1 & 34 \\ \hline
\sigma_1 & & & & 123 \\
 & \sigma_1 & & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\mathcal{E}_2 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\
13 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
21 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
14 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
1324 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
34 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\ \hline
1 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
2 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
3 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
123 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
234 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
4 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
124 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & & & i & & & 13 \\
 & & & & -i & & & & 0 \\
 & & & & & & & i & 14 \\
 & & & & & & -i & & 34 \\ \hline
 & -i & & & & & & & 2 \\
i & & & & & & & & 123 \\
 & & & -i & & & & & 234 \\
 & & i & & & & & & 124 \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & & -\sigma_2 & & 0 \\
 & & & -\sigma_2 & 34 \\ \hline
\sigma_2 & & & & 123 \\
 & \sigma_2 & & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\mathcal{E}_3 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&& 1 \\
13 &&&&&&&&& -1 \\
21 &&&&&&&&&&&& -1 \\
0 &&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&&&& 1 \\
14 &&&&&&&&&&&&& -1 \\
1324 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
34 &&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
1 && -1 \\
2 & 1 \\
3 &&&& 1 \\
123 &&& -1 \\ \hline
134 &&&&&& -1 \\
234 &&&&& 1 \\
4 &&&&&&&& 1 \\
124 &&&&&&& -1 \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&& 1 &&&& 13 \\
&&&&& -1 &&& 0 \\
&&&&&& 1 && 14 \\
&&&&&&& -1 & 34 \\ \hline
-1 &&&&&&&& 2 \\
& 1 &&&&&&& 123 \\
&& -1 &&&&&& 234 \\
&&& 1 &&&&& 124 \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&& -\sigma_3 && 0 \\
&&& -\sigma_3 & 34 \\ \hline
\sigma_3 &&&& 123 \\
& \sigma_3 &&& 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\mathcal{E}_{21} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 && -1 \\
13 & 1 \\
21 &&&& 1 \\
0 &&& -1 \\ \hline
42 &&&&&& -1 \\
14 &&&&& 1 \\
1324 &&&&&&&& 1 \\
34 &&&&&&& -1 \\ \hline
1 &&&&&&&&&& -1 \\
2 &&&&&&&&& 1 \\
3 &&&&&&&&&&&& 1 \\
123 &&&&&&&&&&& -1 \\ \hline
134 &&&&&&&&&&&&&& -1 \\
234 &&&&&&&&&&&&& 1 \\
4 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
124 &&&&&&&&&&&&&&& -1 \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
-1 &&&&&&&& 13 \\
& 1 &&&&&&& 0 \\
&& -1 &&&&&& 14 \\
&&& 1 &&&&& 34 \\ \hline
&&&& -1 &&&& 2 \\
&&&&& 1 &&& 123 \\
&&&&&& -1 && 234 \\
&&&&&&& 1 & 124 \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
\sigma_3 &&&& 0 \\
& \sigma_3 &&& 34 \\ \hline
&& \sigma_3 && 123 \\
&&& \sigma_3 & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\mathcal{E}_4 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&&&&& 1 \\
13 &&&&&&&&&&&&& -1 \\
21 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
0 &&&&&&&&&&&&&&& -1 \\ \hline
42 &&&&&&&&&& 1 \\
14 &&&&&&&&& -1 \\
1324 &&&&&&&&&&&& 1 \\
34 &&&&&&&&&&& -1 \\ \hline
1 &&&&&& 1 \\
2 &&&&& -1 \\
3 &&&&&&&& 1 \\
123 &&&&&&& -1 \\ \hline
134 && 1 \\
234 & -1 \\
4 &&&& 1 \\
124 &&& -1 \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&&&& 1 && 13 \\
&&&&&&& 1 & 0 \\
&&&& 1 &&&& 14 \\
&&&&& 1 &&& 34 \\ \hline
&& 1 &&&&&& 2 \\
&&& 1 &&&&& 123 \\
1 &&&&&&&& 234 \\
& 1 &&&&&&& 124 \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&&& \mathbb{1} & 0 \\
&& \mathbb{1} && 34 \\ \hline
& \mathbb{1} &&& 123 \\
\mathbb{1} &&&& 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\mathcal{E}_{13} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&& 1 \\
13 &&&& 1 \\
21 & -1 \\
0 && -1 \\ \hline
42 &&&&&&& 1 \\
14 &&&&&&&& 1 \\
1324 &&&&& -1 \\
34 &&&&&& -1 \\ \hline
1 &&&&&&&&&&& 1 \\
2 &&&&&&&&&&&& 1 \\
3 &&&&&&&&& -1 \\
123 &&&&&&&&&& -1 \\ \hline
134 &&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
234 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
4 &&&&&&&&&&&&& -1 \\
124 &&&&&&&&&&&&&& -1 \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
& -i &&&&&&& 13 \\
i &&&&&&&& 0 \\
&&& -i &&&&& 14 \\
&& i &&&&&& 34 \\ \hline
&&&&& -i &&& 2 \\
&&&& i &&&& 123 \\
&&&&&&& -i & 234 \\
&&&&&& i && 124 \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
\sigma_2 &&&& 0 \\
& \sigma_2 &&& 34 \\ \hline
&& \sigma_2 && 123 \\
&&& \sigma_2 & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$
\mathcal{E}_{32} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
13 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
14 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
34 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
2 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
123 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
234 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
124 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= i
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & 1 & & & & & & & 13 \\
1 & & & & & & & & 0 \\
 & & & 1 & & & & & 14 \\
 & & 1 & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & 1 & & & 2 \\
 & & & & 1 & & & & 123 \\
 & & & & & & & 1 & 234 \\
 & & & & & & 1 & & 124 \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
\sigma_1 & & & & 0 \\
 & \sigma_1 & & & 34 \\ \hline
 & & \sigma_1 & & 123 \\
 & & & \sigma_1 & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\mathcal{E}_{42} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
13 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
21 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
0 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
14 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
1324 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
34 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
2 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
3 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
123 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
234 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
4 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
124 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= 1
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & i & & & & & 13 \\
 & & -i & & & & & & 0 \\
 & i & & & & & & & 14 \\
-i & & & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & & & -i & 2 \\
 & & & & & & i & & 123 \\
 & & & & & -i & & & 234 \\
 & & & & i & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
= 1
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & -\sigma_2 & & & 0 \\
-\sigma_2 & & & & 34 \\ \hline
 & & & \sigma_2 & 123 \\
 & & \sigma_2 & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\mathcal{E}_{14} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
13 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
21 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
0 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
14 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
1324 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
34 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
2 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
3 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
123 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\
234 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
4 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\
124 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= 1
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & 1 & & & & & 13 \\
 & & 1 & & & & & & 0 \\
 & 1 & & & & & & & 14 \\
1 & & & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & & & -1 & 2 \\
 & & & & & & -1 & & 123 \\
 & & & & & -1 & & & 234 \\
 & & & & -1 & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
= 1
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & \sigma_1 & & & 0 \\
\sigma_1 & & & & 34 \\ \hline
 & & & -\sigma_1 & 123 \\
 & & -\sigma_1 & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\mathcal{E}_{34} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
13 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
21 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
0 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\ \hline
42 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
14 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
1324 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
34 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
2 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
3 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
123 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\ \hline
134 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
234 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
4 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\
124 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= 1
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & -1 & & & & & & 13 \\
 & & & 1 & & & & & 0 \\
-1 & & & & & & & & 14 \\
 & 1 & & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & & 1 & & 2 \\
 & & & & & & & -1 & 123 \\
 & & & & 1 & & & & 234 \\
 & & & & & -1 & & & 124 \\ \hline
\end{array}
= 1
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & \sigma_3 & & & 0 \\
\sigma_3 & & & & 34 \\ \hline
 & & & -\sigma_3 & 123 \\
 & & -\sigma_3 & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$\mathcal{E}_{123} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& & -1 &&&& &&& \\
13 &&&& &&&& && -1 &&&& && \\
21 &&&& &&&& &&& -1 &&&& & \\
0 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\ \hline
42 &&&& &&&& &&&& & -1 &&& \\
14 &&&& &&&& &&&& && -1 && \\
1324 &&&& &&&& &&&& &&& -1 & \\
34 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\ \hline
1 & 1 &&&& &&&& &&&& &&& \\
2 && 1 &&&& &&&& &&&& && \\
3 &&& 1 &&&& &&&& &&&& & \\
123 &&&& 1 &&&& &&&& &&&& \\ \hline
134 &&&& & 1 &&&& &&&& &&& \\
234 &&&& && 1 &&&& &&&& && \\
4 &&&& &&& 1 &&&& &&&& & \\
124 &&&& &&&& 1 &&&& &&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= 1 \begin{array}{|cccc|cccc|r}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&& -1 &&&& 13 \\
&&&& & -1 &&& 0 \\
&&&& && -1 && 14 \\
&&&& &&& -1 & 34 \\ \hline
1 &&&& &&&& 2 \\
& 1 &&& &&&& 123 \\
&& 1 && &&&& 234 \\
&&& 1 & &&&& 124 \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|r}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&& -\mathbb{1} && 0 \\
&&& -\mathbb{1} & 34 \\ \hline
\mathbb{1} &&&& 123 \\
& \mathbb{1} &&& 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\mathcal{E}_{134} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& &&&& &&&& & 1 \\
13 &&&& &&&& &&&& &&& -1 & \\
21 &&&& &&&& &&&& && -1 && \\
0 &&&& &&&& &&&& & 1 &&& \\ \hline
42 &&&& &&&& &&&& 1 &&&& \\
14 &&&& &&&& &&& -1 &&&& & \\
1324 &&&& &&&& && -1 &&&& && \\
34 &&&& &&&& & 1 &&&& &&& \\ \hline
1 &&&& &&&& 1 &&&& &&&& \\
2 &&&& &&& -1 &&&& &&&& & \\
3 &&&& && -1 &&&& &&&& && \\
123 &&&& & 1 &&&& &&&& &&& \\ \hline
134 &&&& 1 &&&& &&&& &&&& \\
234 &&& -1 &&&& &&&& &&&& & \\
4 && -1 &&&& &&&& &&&& && \\
124 & 1 &&&& &&&& &&&& &&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= 1 \begin{array}{|cccc|cccc|r}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&& &&& i & 13 \\
&&&& && -i && 0 \\
&&&& & i &&& 14 \\
&&&& -i &&&& 34 \\ \hline
&&& i & &&&& 2 \\
&& -i && &&&& 123 \\
& i &&& &&&& 234 \\
-i &&&& &&&& 124 \\ \hline
\end{array} = (-1) \begin{array}{|cc|cc|r}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&&& \sigma_2 & 0 \\
&& \sigma_2 && 34 \\ \hline
& \sigma_2 &&& 123 \\
\sigma_2 &&&& 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\mathcal{E}_{124} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& &&&& & -1 &&& \\
13 &&&& &&&& &&&& && -1 && \\
21 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\
0 &&&& &&&& &&&& &&&& 1 \\ \hline
42 &&&& &&&& & -1 &&&& &&& \\
14 &&&& &&&& && -1 &&&& && \\
1324 &&&& &&&& &&& 1 &&&& & \\
34 &&&& &&&& &&&& 1 &&&& \\ \hline
1 &&&& & -1 &&&& &&&& &&& \\
2 &&&& && -1 &&&& &&&& && \\
3 &&&& &&& 1 &&&& &&&& & \\
123 &&&& &&&& 1 &&&& &&&& \\ \hline
134 & -1 &&&& &&&& &&&& &&& \\
234 && -1 &&&& &&&& &&&& && \\
4 &&& 1 &&&& &&&& &&&& & \\
124 &&&& 1 &&&& &&&& &&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= 1 \begin{array}{|cccc|cccc|r}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&& && -1 && 13 \\
&&&& &&& 1 & 0 \\
&&&& -1 &&&& 14 \\
&&&& & 1 &&& 34 \\ \hline
&& -1 && &&&& 2 \\
&&& 1 & &&&& 123 \\
-1 &&&& &&&& 234 \\
& 1 &&& &&&& 124 \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|r}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&&& \sigma_3 & 0 \\
&& \sigma_3 && 34 \\ \hline
& \sigma_3 &&& 123 \\
\sigma_3 &&&& 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\mathcal{E}_{234} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\
13 &&&& &&&& &&&& &&&& 1 \\
21 &&&& &&&& &&&& & 1 &&& \\
0 &&&& &&&& &&&& && 1 && \\ \hline
42 &&&& &&&& &&& 1 &&&& & \\
14 &&&& &&&& &&&& 1 &&&& \\
1324 &&&& &&&& & 1 &&&& &&& \\
34 &&&& &&&& && 1 &&&& && \\ \hline
1 &&&& &&& 1 &&&& &&&& & \\
2 &&&& &&&& 1 &&&& &&&& \\
3 &&&& & 1 &&&& &&&& &&& \\
123 &&&& && 1 &&&& &&&& && \\ \hline
134 &&& 1 &&&& &&&& &&&& & \\
234 &&&& 1 &&&& &&&& &&&& \\
4 & 1 &&&& &&&& &&&& &&& \\
124 && 1 &&&& &&&& &&&& && \\ \hline
\end{array}$$

$$= 1 \begin{array}{|cccc|cccc|r}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&& &&& 1 & 13 \\
&&&& && 1 && 0 \\
&&&& & 1 &&& 14 \\
&&&& 1 &&&& 34 \\ \hline
&&& 1 & &&&& 2 \\
&& 1 && &&&& 123 \\
& 1 &&& &&&& 234 \\
1 &&&& &&&& 124 \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|r}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&&& \sigma_1 & 0 \\
&& \sigma_1 && 34 \\ \hline
& \sigma_1 &&& 123 \\
\sigma_1 &&&& 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\mathcal{E}_{1324} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
13 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
21 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
0 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
14 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
34 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\
2 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
3 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
123 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
234 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
4 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
124 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= \; -i \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & -1 & & & & & & 13 \\
 & & & -1 & & & & & 0 \\
-1 & & & & & & & & 14 \\
 & -1 & & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & & 1 & & 2 \\
 & & & & & & & 1 & 123 \\
 & & & & 1 & & & & 234 \\
 & & & & & 1 & & & 124 \\ \hline
\end{array} \quad = \; -i \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & -\mathbb{1} & & & 0 \\
-\mathbb{1} & & & & 34 \\ \hline
 & & & \mathbb{1} & 123 \\
 & & \mathbb{1} & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

Постулированный нами закон умножения (15) базисных векторов контравариантной сопряженной алгебры Клиффорда $^{+}\widetilde{\mathbb{C}}$ приводит к тому, что структурные матрицы $^{+}C^{L}{}_{KI}$ этой алгебры в действительном представлении совпадают с транспонированными структурными матрицами $C^{IK}{}_{L}$ алгебры действия $\widetilde{\mathbb{C}}$. Этот вывод мы запишем следующим образом

$$^{+}C^{L}{}_{KI} = (C^{IK}{}_{L})^{t} \, .$$

Отсюда следует, что симметричные структурные матрицы алгебры $^{+}\widetilde{\mathbb{C}}$ совпадают с соответствующими структурными матрицами алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}$ и антисимметричные структурные матрицы алгебры $^{+}\widetilde{\mathbb{C}}$ отличаются противоположным знаком от соответствующих структурных матриц алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}$.

Переход от действительных матриц к комплексным связан с заменой блочных матриц

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \, , \qquad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array}$$

на действительную и мнимую единицы соответственно. Но блочной матрице

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array}$$

при транспонировании соответствуют матрица

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \, ,$$

эквивалентная $-i$. Таким образом, структурные матрицы $^{+}C^{L}{}_{KI}$ контравариантной сопряженной алгебры Клиффорда $^{+}\widetilde{\mathbb{C}}$ в комплексном представлении совпадают с эрмитово сопряженными структурными матрицами $C^{IK}{}_{L}$ алгебры действия $\widetilde{\mathbb{C}}$. Поэтому нужно считать, что введенная нами контравариантная сопряженная алгебра Клиффорда $^{+}\widetilde{\mathbb{C}}$ с законом умножения базисных векторов (15) является алгеброй действия антилептонов.

VI. СЖАТОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОНТРАВАРИАНТНОЙ СОПРЯЖЕННОЙ АЛГЕБРЫ ДЕЙСТВИЯ

В предыдущем Разделе мы получили для контравариантной сопряженной алгебры $^{+}\mathbb{C}_3$ 8 структурных матриц, которые в комплексном представлении совпадают с 8 сопряженными матрицами Дирака $^{+}\gamma^{0}$, $^{+}\gamma^{1}$, $^{+}\gamma^{2}$, $^{+}\gamma^{3}$, $^{+}\gamma^{21}$, $^{+}\gamma^{13}$, $^{+}\gamma^{32}$, $^{+}\gamma^{123}$,
. Затем для $^{+}\mathbb{C}_4$ мы получили 16 структурных матриц, близких по духу к сопряженным матрицам Дирака, но отличных от них прежде всего размерностью. Необходимо отметить, что получить 16 сопряженных матриц Дирака, используя наш подход, то есть исходя из точного регулярного представления контравариантной сопряженной алгебры Клиффорда, невозможно принципиально. Для этого необходимо обратиться к ее сжатому представлению. В этом разделе рассмотрим сжатое представление базисных векторов алгебры Клиффорда $^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_n$ в ее подалгебре $^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_{n-k}$, где $k < n$. Для примера рассмотрим сжатое представление базисных векторов алгебры $^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_n$ в ее подалгебре $^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_{n-1}$. Разобьем базисные векторы $\mathcal{E}_I$ алгебры $^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_n$ на две группы $\mathcal{E}_{I_1}$ и $\mathcal{E}_{I_2}$ с одинаковым числом векторов так, чтобы векторы $\mathcal{E}_{I_1}$ образовывали алгебру $^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_{n-1}$. В силу симметрий алгебры Клиффорда соотношения (15) имеют вид

$$\mathcal{E}_{I_1} \circ \mathcal{E}_{K_1} = \mathcal{E}_{L_1} \cdot {}^{+}C^{L_1}{}_{K_1 I_1} \, , \tag{22}$$

$$\mathcal{E}_{I_2} \circ \mathcal{E}_{K_1} = \mathcal{E}_{L_2} \cdot {}^{+}C^{L_2}{}_{K_1 I_2} \, , \tag{23}$$

$$\mathcal{E}_{I_1} \circ \mathcal{E}_{K_2} = \mathcal{E}_{L_2} \cdot {}^{+}C^{L_2}{}_{K_2 I_1} \, ,$$

$$\mathcal{E}_{I_2} \circ \mathcal{E}_{K_2} = \mathcal{E}_{L_1} \cdot {}^{+}C^{L_1}{}_{K_2 I_2} \, .$$

Будем полагать, что приближенно при вычислении матриц представления базисных векторов алгебры $^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_n$ в алгебре $^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_{n-1}$ базисные векторы $\mathcal{E}_{L_2}$ в правой части уравнения (23) можно заменить на базисные векторы $\mathcal{E}_{L_1}$ с помощью соотношения

$$\mathcal{E}_{L_2} = \mathcal{E}_{L_1} \cdot P^{L_1}{}_{L_2} \, , \tag{24}$$

где $P^{L_1}{}_{L_2}$ есть матрица соответствий. Тогда соотношение (23) принимает вид:

$$\mathcal{E}_{I_2} \circ \mathcal{E}_{K_1} = \mathcal{E}_{L_1} \cdot P^{L_1}{}_{L_2} \cdot {}^{+}C^{L_2}{}_{K_1 I_2} \, . \tag{25}$$

Соотношения (22) и (25) позволяют получить матрицы представления базисных векторов алгебры $^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_n$ в ее подалгебре $^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_{n-1}$, причем базисные векторы подалгебры $^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_{n-1}$ представляются точно, а остальные базисные векторы – приближенно.

Аналогичным образом можно рассмотреть сжатое представление базисных векторов алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_n$ в ее подалгебре ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_{n-k}$, где $k < n$.

1. Первое сжатое представление.

Рассмотрим первое сжатое представление

$$^{+}R_1 : {}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4 \to {}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_3 \, \{\mathcal{E}_{32}, \mathcal{E}_{13}, \mathcal{E}_{21}, \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_{123}\}.$$

Для этого положим, что при вычислении структурных матриц по формуле (25) соотношение (24) определяется тем, что базисные векторы с индексами

$$42, 14, 1324, 34, 134, 234, 4, 124$$

заменяются на базисные векторы с индексами

$$32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123$$

соответственно. Тогда размерность матриц базисных векторов алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4$ понижается вдвое и равна 8×8 в действительном представлении, 4×4 в комплексном представлении и $2{\times}2$ в кватернионном представлении.

В результате получим следующие структурные матрицы.

$$\mathcal{E}_0 \sim \begin{array}{rr|cccc|cccc|} & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 42 & 32\,1 & & & & & & & & \\ 14 & 13 & 1 & & & & & & & \\ 1324 & 21 & & 1 & & & & & & \\ 34 & 0 & & & 1 & & & & & \\ \hline 134 & 1 & & & & 1 & & & & \\ 234 & 2 & & & & & 1 & & & \\ 4 & 3 & & & & & & 1 & & \\ 124 & 123 & & & & & & & 1 & \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|} \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbb{1} & \\ \hline & \mathbb{1} \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}_1 \sim \begin{array}{rr|cccc|cccc|} & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 42 & 32 & & & & & & & & -1 \\ 14 & 13 & & & & & & & 1 & \\ 1324 & 21 & & & & & & -1 & & \\ 34 & 0 & & & & & 1 & & & \\ \hline 134 & 1 & & & & 1 & & & & \\ 234 & 2 & & & -1 & & & & & \\ 4 & 3 & & 1 & & & & & & \\ 124 & 123 & -1 & & & & & & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & & -1 \\ & & -1 & \\ \hline & 1 & & \\ 1 & & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline & -\sigma_1 \\ \hline \sigma_1 & \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}_2 \sim \begin{array}{rr|cccc|cccc|} & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 42 & 32 & & & & & & & -1 & \\ 14 & 13 & & & & & & & & -1 \\ 1324 & 21 & & & & & 1 & & & \\ 34 & 0 & & & & & & 1 & & \\ \hline 134 & 1 & & & 1 & & & & & \\ 234 & 2 & & & & 1 & & & & \\ 4 & 3 & -1 & & & & & & & \\ 124 & 123 & & -1 & & & & & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & & i \\ & & -i & \\ \hline & -i & & \\ i & & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline & -\sigma_2 \\ \hline \sigma_2 & \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}_3 \sim \begin{array}{rr|cccc|cccc|} & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 42 & 32 & & & & & & 1 & & \\ 14 & 13 & & & & & -1 & & & \\ 1324 & 21 & & & & & & & & -1 \\ 34 & 0 & & & & & & & 1 & \\ \hline 134 & 1 & & -1 & & & & & & \\ 234 & 2 & 1 & & & & & & & \\ 4 & 3 & & & & 1 & & & & \\ 124 & 123 & & & -1 & & & & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & 1 & \\ & & & -1 \\ \hline -1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline & -\sigma_3 \\ \hline \sigma_3 & \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}_4 \sim \begin{array}{rr|cccc|cccc|} & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 42 & 32 & & & & & & 1 & & \\ 14 & 13 & & & & & -1 & & & \\ 1324 & 21 & & & & & & & & 1 \\ 34 & 0 & & & & & & & -1 & \\ \hline 134 & 1 & & 1 & & & & & & \\ 234 & 2 & -1 & & & & & & & \\ 4 & 3 & & & & 1 & & & & \\ 124 & 123 & & & -1 & & & & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline & \mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}_{21} \sim \begin{array}{rr|cccc|cccc|} & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 42 & 32 & & -1 & & & & & & \\ 14 & 13 & 1 & & & & & & & \\ 1324 & 21 & & & & 1 & & & & \\ 34 & 0 & & & -1 & & & & & \\ \hline 134 & 1 & & & & & & -1 & & \\ 234 & 2 & & & & & 1 & & & \\ 4 & 3 & & & & & & & & 1 \\ 124 & 123 & & & & & & & -1 & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|} \hline -1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & -1 & \\ & & & 1 \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline \sigma_3 & \\ \hline & \sigma_3 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}_{13} \sim \begin{array}{rr|cccc|cccc|} & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 42 & 32 & & & 1 & & & & & \\ 14 & 13 & & & & 1 & & & & \\ 1324 & 21 & -1 & & & & & & & \\ 34 & 0 & & -1 & & & & & & \\ \hline 134 & 1 & & & & & & & 1 & \\ 234 & 2 & & & & & & & & 1 \\ 4 & 3 & & & & & -1 & & & \\ 124 & 123 & & & & & & -1 & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|} \hline & -i & & \\ i & & & \\ \hline & & & -i \\ & & i & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline \sigma_2 & \\ \hline & \sigma_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}_{32} \sim \begin{array}{rr|cccc|cccc|} & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 42 & 32 & & & & 1 & & & & \\ 14 & 13 & & & -1 & & & & & \\ 1324 & 21 & & 1 & & & & & & \\ 34 & 0 & -1 & & & & & & & \\ \hline 134 & 1 & & & & & & & & 1 \\ 234 & 2 & & & & & & & -1 & \\ 4 & 3 & & & & & & 1 & & \\ 124 & 123 & & & & & -1 & & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|} \hline & 1 & & \\ 1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & 1 & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline \sigma_1 & \\ \hline & \sigma_1 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}_{14} \sim \begin{array}{rr|cccc|cccc|} & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 42 & 32 & & & 1 & & & & & \\ 14 & 13 & & & & 1 & & & & \\ 1324 & 21 & 1 & & & & & & & \\ 34 & 0 & & 1 & & & & & & \\ \hline 134 & 1 & & & & & & & -1 & \\ 234 & 2 & & & & & & & & -1 \\ 4 & 3 & & & & & -1 & & & \\ 124 & 123 & & & & & & -1 & & \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|} \hline & 1 & & \\ 1 & & & \\ \hline & & & -1 \\ & & -1 & \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|} \hline \sigma_1 & \\ \hline & -\sigma_1 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}_{42} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
42 & 32 & & & & 1 & & & & \\
14 & 13 & & & -1 & & & & & \\
1324 & 21 & & -1 & & & & & & \\
34 & 0 & 1 & & & & & & & \\ \hline
134 & 1 & & & & & & & & -1 \\
234 & 2 & & & & & & & 1 & \\
4 & 3 & & & & & & 1 & & \\
124 & 123 & & & & & -1 & & & \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|} \hline & i & & \\ -i & & & \\ \hline & & & -i \\ & & i & \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|} \hline -\sigma_2 & \\ \hline & \sigma_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}_{34} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
42 & 32 & -1 & & & & & & & \\
14 & 13 & & -1 & & & & & & \\
1324 & 21 & & & 1 & & & & & \\
34 & 0 & & & & 1 & & & & \\ \hline
134 & 1 & & & & & 1 & & & \\
234 & 2 & & & & & & 1 & & \\
4 & 3 & & & & & & & -1 & \\
124 & 123 & & & & & & & & -1 \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|} \hline -1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & -1 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|} \hline \sigma_3 & \\ \hline & -\sigma_3 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}_{123} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
42 & 32 & & & & & -1 & & & \\
14 & 13 & & & & & & -1 & & \\
1324 & 21 & & & & & & & -1 & \\
34 & 0 & & & & & & & & -1 \\ \hline
134 & 1 & 1 & & & & & & & \\
234 & 2 & & 1 & & & & & & \\
4 & 3 & & & 1 & & & & & \\
124 & 123 & & & & 1 & & & & \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & -1 & \\ & & & -1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline \end{array} = (-1) \begin{array}{|c|c|} \hline & \mathbb{1} \\ \hline -\mathbb{1} & \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}_{124} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
42 & 32 & & & & & -1 & & & \\
14 & 13 & & & & & & -1 & & \\
1324 & 21 & & & & & & & 1 & \\
34 & 0 & & & & & & & & 1 \\ \hline
134 & 1 & -1 & & & & & & & \\
234 & 2 & & -1 & & & & & & \\
4 & 3 & & & 1 & & & & & \\
124 & 123 & & & & 1 & & & & \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & -1 & \\ & & & 1 \\ \hline -1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|} \hline & \sigma_3 \\ \hline \sigma_3 & \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}_{134} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
42 & 32 & & & & & & & & 1 \\
14 & 13 & & & & & & & -1 & \\
1324 & 21 & & & & & & -1 & & \\
34 & 0 & & & & & 1 & & & \\ \hline
134 & 1 & & & & 1 & & & & \\
234 & 2 & & & -1 & & & & & \\
4 & 3 & & -1 & & & & & & \\
124 & 123 & 1 & & & & & & & \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & & i \\ & & -i & \\ \hline & i & & \\ -i & & & \\ \hline \end{array} = (-1) \begin{array}{|c|c|} \hline & \sigma_2 \\ \hline \sigma_2 & \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}_{234} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
42 & 32 & & & & & & & 1 & \\
14 & 13 & & & & & & & & 1 \\
1324 & 21 & & & & & 1 & & & \\
34 & 0 & & & & & & 1 & & \\ \hline
134 & 1 & & & 1 & & & & & \\
234 & 2 & & & & 1 & & & & \\
4 & 3 & 1 & & & & & & & \\
124 & 123 & & 1 & & & & & & \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & & 1 \\ & & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ 1 & & & \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|} \hline & \sigma_1 \\ \hline \sigma_1 & \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}_{1324} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
42 & 32 & & 1 & & & & & & \\
14 & 13 & -1 & & & & & & & \\
1324 & 21 & & & & 1 & & & & \\
34 & 0 & & & -1 & & & & & \\ \hline
134 & 1 & & & & & & -1 & & \\
234 & 2 & & & & & 1 & & & \\
4 & 3 & & & & & & & & -1 \\
124 & 123 & & & & & & & 1 & \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|} \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & -1 & \\ & & & -1 \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbb{1} & \\ \hline & -\mathbb{1} \\ \hline \end{array}$$

Приведенные матрицы соответствуют первому сжатому представлению базисных векторов алгебры Клиффорда ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4$ в алгебре ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_3$. В рассматриваемом представлении только базисные векторы

$$\mathcal{E}_{32},\ \mathcal{E}_{13},\ \mathcal{E}_{21},\ \mathcal{E}_{0},\ \mathcal{E}_{1},\ \mathcal{E}_{2},\ \mathcal{E}_{3},\ \mathcal{E}_{123}\,.$$

представлены структурными матрицами точно.

2. Второе сжатое представление.

Рассмотрим второе сжатое представление

$${}^{+}R_2 : {}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4 \to {}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_2\,\{\mathcal{E}_{32}, \mathcal{E}_{13}, \mathcal{E}_{21}, \mathcal{E}_{0}\}.$$

Для этого положим, что при вычислении структурных матриц по формуле (25) соотношение (24) определяется тем, что базисные векторы с индексами $(42, 14, 1324, 34)$, $(134, 234, 4, 124)$ и $(1, 2, 3, 123)$ заменяются на базисные векторы с индексами $(32, 13, 21, 0)$ соответственно. Тогда размерность матриц представления базисных векторов алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4$ понижается вдвое в сравнении с первым сжатым представлением и равна 4×4 в действительном представлении, 2×2 в комплексном представлении и 1×1 в кватернионном представлении.

Ограничимся тем, что приведем матрицы регулярного представления образующих базисных векторов алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4$ в алгебре ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_2$. Имеем

$$\mathcal{E}_{1} \sim \begin{array}{cc|cc|cc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline
1 & 32 & & & & 1 \\
2 & 13 & & & -1 & \\ \hline
3 & 21 & & 1 & & \\
123 & 0 & -1 & & & \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} = i\,\sigma_1$$

$$\mathcal{E}_{2} \sim \begin{array}{cc|cc|cc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline
1 & 32 & & & 1 & \\
2 & 13 & & & & 1 \\ \hline
3 & 21 & -1 & & & \\
123 & 0 & & -1 & & \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline & -i \\ \hline i & \\ \hline \end{array} = i\,\sigma_2$$

$$\mathcal{E}_{3} \sim \begin{array}{cc|cc|cc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline
1 & 32 & & -1 & & \\
2 & 13 & 1 & & & \\ \hline
3 & 21 & & & & 1 \\
123 & 0 & & & -1 & \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = i\,\sigma_3$$

$$\mathcal{E}_{4} \sim \begin{array}{cc|cc|cc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline
134 & 32 & & 1 & & \\
234 & 13 & -1 & & & \\ \hline
4 & 21 & & & & 1 \\
124 & 0 & & & -1 & \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = i\,\mathbb{1}$$

Таким образом, базисные векторы $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$, представлены в алгебре $\widetilde{\mathbb{C}}_2$ матрицами Паули. В результате для базисных векторов алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4$ получим

$$\begin{array}{cc}
\mathcal{E}_{32} \sim i\,\sigma_1\,, & \mathcal{E}_{42} \sim -1\,\sigma_2\,, \\
\mathcal{E}_{13} \sim i\,\sigma_2\,, & \mathcal{E}_{14} \sim 1\,\sigma_1\,, \\
\mathcal{E}_{21} \sim i\,\sigma_3\,, & \mathcal{E}_{1324} \sim i\,\mathbb{1}\,, \\
\mathcal{E}_{0} \sim 1\,\mathbb{1}\,, & \mathcal{E}_{34} \sim 1\,\sigma_3\,,
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\mathcal{E}_{1} \sim i\,\sigma_1\,, & \mathcal{E}_{134} \sim -1\,\sigma_2\,, \\
\mathcal{E}_{2} \sim i\,\sigma_2\,, & \mathcal{E}_{234} \sim 1\,\sigma_1\,, \\
\mathcal{E}_{3} \sim i\,\sigma_3\,, & \mathcal{E}_{4} \sim i\,\mathbb{1}\,, \\
\mathcal{E}_{123} \sim 1\,\mathbb{1}\,, & \mathcal{E}_{124} \sim 1\,\sigma_3\,.
\end{array}$$

В рассматриваемом представлении только базисные векторы $\mathcal{E}_{32}, \mathcal{E}_{13}, \mathcal{E}_{21}, \mathcal{E}_0$ представлены точно. Соотношения

$$\begin{array}{c}
\mathcal{E}_{32} \sim i\,\sigma_1\,, \\
\mathcal{E}_{13} \sim i\,\sigma_2\,, \\
\mathcal{E}_{21} \sim i\,\sigma_3\,, \\
\mathcal{E}_{0} \sim 1\,\mathbb{1}
\end{array}$$

можно рассматривать как соответствие между указанными базисными векторами и кватернионами. Именно такое соответствие было постулировано в разделе IV.3.

3. Третье сжатое представление

Рассмотрим третье сжатое представление

$${}^{+}R_3 : {}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4 \to {}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_1\,\{\mathcal{E}_{21}, \mathcal{E}_0\}$$

Для этого положим, что соотношение (24) определяется тем, что базисные векторы с индексами $(42, 14)$, $(1324, 34)$, $(134, 234)$, $(4, 124)$, $(1, 2)$, $(3, 123)$, $(32, 13)$ заменяются на векторы с индексами $(21, 0)$ соответственно. Тогда размерность матриц базисных векторов алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4$ понижается вдвое в сравнении с вторым сжатым представлением и равна 2×2 в действительном представлении, 1×1 в комплексном представлении. В результате для базисных векторов алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4$ получим

$$\begin{array}{cccc}
\mathcal{E}_{32} \sim i\,, & \mathcal{E}_{1} \sim i\,, & \mathcal{E}_{42} \sim i\,, & \mathcal{E}_{134} \sim i\,, \\
\mathcal{E}_{13} \sim 1\,, & \mathcal{E}_{2} \sim 1\,, & \mathcal{E}_{14} \sim 1\,, & \mathcal{E}_{234} \sim 1\,, \\
\mathcal{E}_{21} \sim i\,, & \mathcal{E}_{3} \sim i\,, & \mathcal{E}_{1324} \sim i\,, & \mathcal{E}_{4} \sim i\,, \\
\mathcal{E}_{0} \sim 1\,, & \mathcal{E}_{123} \sim 1\,, & \mathcal{E}_{34} \sim 1\,, & \mathcal{E}_{124} \sim 1
\end{array}$$

В рассматриваемом представлении вектор $\mathcal{E}_{21}$ и только он представляется точно мнимой единицей.

Полученное здесь соотношение

$$\mathcal{E}_{21} \sim i$$

подтверждает соответствие, постулированное в разделе IV.2.

VII. ВЫВОДЫ

1. Структурные матрицы контравариантной сопряженной алгебры Клиффорда ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_3$ в комплексном представлении совпадают с 8 эрмитово сопряженными матрицами Дирака ${}^{+}\gamma^0$, ${}^{+}\gamma^1$, ${}^{+}\gamma^2$, ${}^{+}\gamma^3$, ${}^{+}\gamma^{21}$, ${}^{+}\gamma^{13}$, ${}^{+}\gamma^{32}$, ${}^{+}\gamma^{123}$.

2. Структурные матрицы контравариантной сопряженной алгебры Клиффорда ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}$ в действительном представлении есть транспонированные структурные матрицы ковариантной алгебры Клиффорда $\widetilde{\mathbb{C}}$. При переходе к комплексному представлению эти матрицы переходят в эрмитово сопряженные.

3. 16 структурных матриц контравариантной сопряженной алгебры Клиффорда ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4$ обобщают 16 эрмитово сопряженных матриц Дирака, отличаясь от них прежде всего размерностью.

4. Если предположить вырождение части компонент вектора контравариантной сопряженной алгебры Клиффорда ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}_4$, то структурные матрицы этой алгебры в комплексном представлении совпадают с 16-ю эрмитово сопряженными матрицами Дирака.

5. Усиление вырождения компонент вектора сначала приводит к структурным матрицам в виде матриц Паули, а затем к действительной и мнимой единицам.