

Лекция 13. Алгебра релятивистских кварков

А. А. Кецарис
(25 апреля 2005 г.)

В этой Лекции мы продолжаем рассматривать алгебру кварков как обобщение алгебры Клиффорда. Цветовым разновидностям кварков мы ставим в соответствие разновидности перестановочных соотношений с участием базисного вектора времени. Уравнения квантовой механики для релятивистских кварков устанавливаются на основании того же алгоритма, из которого ранее было получено обобщение уравнения Дирака для лептонов. Эти уравнения относятся к кваркам одного поколения и в стандартном представлении разделяются на две независимые системы уравнений, одна из которых относится к верхнему кварку, а другая к нижнему.

I. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ КВАРКИ И ЦВЕТ

Прежде чем обратиться к алгебре релятивистских кварков \mathbb{Q}_4 напомним следующее. Установлено, что каждый из кварков u, d, s, c, b существует в трех разновидностях. Отличительное свойство этих разновидностей названо *цветом*, а кварки в указанных разновидностях обозначены как *красный*, *желтый* и *синий*. Было бы странно, если бы цветовая симметрия не имела под собой алгебраической основы. Скорее всего искомая алгебра релятивистских кварков \mathbb{Q}_4 будет представлена тремя вариантами, каждый из которых базируется на одной и той же алгебре \mathbb{Q}_3 . Для того, чтобы получить релятивистскую алгебру \mathbb{Q}_4 , нам предстоит расширить образующее пространство, заменив геометрическое пространство на пространство-время СТО. Иными словами, мы должны ввести координату времени, базисный вектор λ_4 и записать перестановочные соотношения этого базисного вектора с геометрическими базисными векторами λ_a . Именно с разновидностями указанных перестановочных соотношений мы в дальнейшем свяжем цветовые разновидности кварков.

Итак, возможны следующие четыре разновидности перестановочных соотношений с участием λ_4 .

1. Все соотношения антикоммутируют

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3,\end{aligned}\tag{1}$$

2. Два соотношения антикоммутируют, одно соотношение коммутативно

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3,\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_3,\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3,\end{aligned}\tag{4}$$

3. Одно соотношение антикоммутирует, два соотношения коммутативны

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_3,\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_3,\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3,\end{aligned}\tag{7}$$

4. Все соотношения коммутативны

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_3,\end{aligned}\tag{8}$$

Теперь нам необходимо выбрать перестановочные соотношения из перечисленных и определить алгебры цветных кварков. Забегая вперед, отметим, что такой выбор может быть сделан на основании определенного прочтения диаграмм Юнга, классифицирующих симметрии тензоров произвольного ранга. Этому вопросу будет посвящена следующая Лекция. А пока начнем с алгебры цветных кварков первого поколения $\mathbb{Q}(u, d)$ и примем без каких-либо пояснений следующее.

Алгебра красных u и d -кварков $\mathbb{Q}(u, d)_r$ использует перестановочные соотношения

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3,\end{aligned}$$

Алгебра желтых u и d -кварков $\mathbb{Q}(u, d)_y$ использует перестановочные соотношения

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3,\end{aligned}$$

Алгебра синих u и d -кварков $\mathbb{Q}(u, d)_b$ использует перестановочные соотношения

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_3,\end{aligned}$$

Для того, чтобы перейти к алгебрам цветных кварков второго и третьего поколений, необходимо (в соответствии с нашим общим подходом) использовать перестановочные соотношения, отличающиеся от предыдущих циклической перестановкой геометрических базисных векторов. Тогда для алгебры $\mathbb{Q}(c, s)$ получим:

Алгебра красных c и s -кварков $\mathbb{Q}(c, s)_r$ использует перестановочные соотношения

$$\begin{aligned}\lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3, \\ \lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2,\end{aligned}$$

Алгебра желтых c и s -кварков $\mathbb{Q}(c, s)_y$ использует перестановочные соотношения

$$\begin{aligned}\lambda_3 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_3, \\ \lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2,\end{aligned}$$

Алгебра синих c и s -кварков $\mathbb{Q}(c, s)_b$ использует перестановочные соотношения

$$\begin{aligned}\lambda_3 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_3, \\ \lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_2,\end{aligned}$$

Для алгебры $\mathbb{Q}(t, b)$ получим:

Алгебра красных t и b -кварков $\mathbb{Q}(t, b)_r$ использует перестановочные соотношения

$$\begin{aligned}\lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3, \\ \lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1,\end{aligned}$$

Алгебра желтых t и b -кварков $\mathbb{Q}(t, b)_y$ использует перестановочные соотношения

$$\begin{aligned}\lambda_2 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3, \\ \lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1,\end{aligned}$$

Алгебра синих t и b -кварков $\mathbb{Q}(t, b)_b$ использует перестановочные соотношения

$$\begin{aligned}\lambda_2 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3, \\ \lambda_1 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_1,\end{aligned}$$

Далее рассмотрим подробнее алгебры цветных кварков только первого поколения, имея в виду, что переход к алгебрам кварков других поколений очевиден. Наши построения имеют общую часть, которая, по существу, совпадает с Разделом 2 Лекции 12. С учетом этого перейдем непосредственно к рассмотрению алгебры красных кварков $\mathbb{Q}(u, d)_r$.

II. АЛГЕБРА КРАСНЫХ U И D -КВАРКОВ

$\mathbb{Q}(U, D)_R$

1. Базисные векторы и их произведения

Укажем базисные векторы алгебры $\mathbb{Q}(u, d)_r$ и правила умножения, которым они подчиняются.

- λ_0 – базисный вектор скалярной части вектора. Для λ_0 имеет место правило умножения

$$\lambda_0 \circ \lambda_0 = \lambda_0.$$

- Образующие векторы λ_i , где индекс i пробегает значения от 1 до 4, есть базисные векторы пространства-времени СТО. Число векторов λ_i равно четырем. Для них имеют место правила умножения

$$\lambda_i \circ \lambda_0 = \lambda_0 \circ \lambda_i = \lambda_i.$$

$$\lambda_i \circ \lambda_i = \text{sign } \lambda_i,$$

где

$$\text{sign } \lambda_1 = \text{sign } \lambda_2 = \text{sign } \lambda_3 = -\text{sign } \lambda_4 = \lambda_0.$$

- Векторы

$$\lambda_{ik} = \lambda_k \circ \lambda_i.$$

Здесь $i \neq k$. Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6.$$

В соответствии с Разделом I Лекции 12 и Разделом I настоящей Лекции для этих векторов выполняется правило перестановки индексов и, соответственно, сомножителей (перестановочные соотношения)

$$\begin{aligned}\lambda_{21} &= -\lambda_{21}, & \lambda_{13} &= \lambda_{31}, & \lambda_{32} &= -\lambda_{23}, \\ \lambda_{14} &= -\lambda_{41}, & \lambda_{24} &= -\lambda_{42}, & \lambda_{34} &= -\lambda_{43}.\end{aligned}$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и перестановочных соотношений. В частности, имеем

$$\begin{aligned}\lambda_{21} \circ \lambda_{21} &= -\lambda_0, & \lambda_{42} \circ \lambda_{42} &= \lambda_0, \\ \lambda_{32} \circ \lambda_{32} &= -\lambda_0, & \lambda_{14} \circ \lambda_{14} &= \lambda_0, \\ \lambda_{13} \circ \lambda_{13} &= \lambda_0, & \lambda_{34} \circ \lambda_{34} &= \lambda_0.\end{aligned}$$

- Векторы

$$\lambda_{ikl} = \lambda_l \circ \lambda_k \circ \lambda_i.$$

Здесь $i \neq k, i \neq l, k \neq l$. Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4.$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из перестановочных соотношений

$$\begin{aligned}\lambda_{123} &= -\lambda_{213} = -\lambda_{231} = \lambda_{321} = -\lambda_{312} = -\lambda_{132}, \\ \lambda_{124} &= -\lambda_{214} = \lambda_{241} = -\lambda_{421} = \lambda_{412} = -\lambda_{142}, \\ \lambda_{134} &= \lambda_{314} = -\lambda_{341} = \lambda_{431} = \lambda_{413} = -\lambda_{143}, \\ \lambda_{234} &= -\lambda_{324} = \lambda_{342} = -\lambda_{432} = \lambda_{423} = -\lambda_{243}.\end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\begin{aligned}\lambda_{123} \circ \lambda_{123} &= \lambda_0, & \lambda_{124} \circ \lambda_{124} &= \lambda_0, \\ \lambda_{134} \circ \lambda_{134} &= -\lambda_0, & \lambda_{234} \circ \lambda_{234} &= \lambda_0.\end{aligned}$$

- Вектор

$$\lambda_{1324} = \lambda_1 \circ \lambda_3 \circ \lambda_2 \circ \lambda_4.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из перестановочных соотношений

$$\begin{aligned}\lambda_{1234} &= -\lambda_{2134} = -\lambda_{2314} = \lambda_{3214} = \\ &= -\lambda_{3124} = -\lambda_{1324} = \lambda_{1243} = -\lambda_{2143} = \\ &= \lambda_{2413} = -\lambda_{4213} = \lambda_{4123} = -\lambda_{1423} = \\ &= \lambda_{1342} = \lambda_{3142} = -\lambda_{3412} = \lambda_{4312} = \\ &= \lambda_{4132} = -\lambda_{1432} = \lambda_{2341} = -\lambda_{3241} = \\ &= \lambda_{3421} = -\lambda_{4321} = \lambda_{4231} = -\lambda_{2431}.\end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\lambda_{1324} \circ \lambda_{1324} = \lambda_0.$$

2. Структурные матрицы алгебры красных кварков $\mathbb{Q}(u, d)_r$

Приведем структурные матрицы контравариантной алгебры $\mathbb{Q}(u, d)_r$. Компоненты векторов и матриц рассматриваются в следующей последовательности индексов

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124).$$

Переход от действительного представления к компактному представлению осуществляется путем введения соответствующих блочных матриц. При преобразовании матриц C_{KI}^L и C_L^{IK} от действительного представления к iab -представлению использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$\begin{aligned}1 &= \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, & i &= \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}, \\ a &= \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, & b &= \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

При преобразовании матриц C_{KI}^L и C_L^{IK} от iab -представления к IAB -представлению использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$\begin{aligned}\mathbb{1} &= \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, & I &= \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \\ A &= \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

1. Структурные матрицы контравариантной алгебры действия красных кварков $\mathbb{Q}(u, d)_{r_{right}}$

$$\lambda_0 \sim$$

| | | | | | | | | | | | | | |
|------|----|----|----|---|----|----|----|---|---|---|-----|-----|-----|
| | 32 | 13 | 21 | 0 | 42 | 14 | 34 | 1 | 2 | 3 | 123 | 234 | 124 |
| 32 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 13 | | 1 | | | | | | | | | | | |
| 21 | | | 1 | | | | | | | | | | |
| 0 | | | | 1 | | | | | | | | | |
| 42 | | | | | 1 | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | 1 | | | | | | | |
| 1324 | | | | | | | 1 | | | | | | |
| 34 | | | | | | | | 1 | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | 1 | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | 1 | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | 1 | | |
| 123 | | | | | | | | | | | | 1 | |
| 134 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| 234 | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | |
| 124 | | | | | | | | | | | | | |

$$= 1$$

| | | | | | | | |
|-----|----|---|----|----|---|-----|-----|
| | 13 | 0 | 14 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| 13 | 1 | | | | | | |
| 0 | | 1 | | | | | |
| 14 | | | 1 | | | | |
| 34 | | | | 1 | | | |
| 2 | | | | | 1 | | |
| 123 | | | | | | 1 | |
| 124 | | | | | | | 1 |

$$= 1$$

| | | | | |
|-----|---|----|-----|-----|
| | 0 | 34 | 123 | 124 |
| 0 | 1 | | | |
| 34 | | 1 | | |
| 123 | | | 1 | |
| 124 | | | | 1 |

$$\lambda_1 \sim$$

| | | | | | | | | | | | | | |
|------|----|----|----|---|----|----|----|---|---|---|-----|-----|-----|
| | 32 | 13 | 21 | 0 | 42 | 14 | 34 | 1 | 2 | 3 | 123 | 234 | 124 |
| 32 | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | | | | | | | | | | | | | |
| 42 | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | | | | | |
| 1324 | | | | | | | | | | | | | |
| 34 | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | |
| 123 | | | | | | | | | | | | | |
| 134 | | | | | | | | | | | | | |
| 234 | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | |
| 124 | | | | | | | | | | | | | |

$$= a$$

| | | | | | | | |
|-----|----|---|----|----|---|-----|-----|
| | 13 | 0 | 14 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| 13 | | | | | | | |
| 0 | | 1 | | | | | |
| 14 | | | 1 | | | | |
| 34 | | | | 1 | | | |
| 2 | | | | | 1 | | |
| 123 | | | | | | 1 | |
| 124 | | | | | | | 1 |

$$= a$$

| | | | | |
|-----|---|----|-----|-----|
| | 0 | 34 | 123 | 124 |
| 0 | | | | |
| 34 | | A | | |
| 123 | | | -A | |
| 124 | | | | |

$$\lambda_2 \sim$$

| | | | | | | | | | | | | | |
|------|----|----|----|---|----|----|----|---|---|---|-----|-----|-----|
| | 32 | 13 | 21 | 0 | 42 | 14 | 34 | 1 | 2 | 3 | 123 | 234 | 124 |
| 32 | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | | | | | | | | | | | | | |
| 42 | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | | | | | |
| 1324 | | | | | | | | | | | | | |
| 34 | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | |
| 123 | | | | | | | | | | | | | |
| 134 | | | | | | | | | | | | | |
| 234 | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | |
| 124 | | | | | | | | | | | | | |

$$= b$$

| | | | | | | | |
|-----|----|---|----|----|---|-----|-----|
| | 13 | 0 | 14 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| 13 | | | | | | | |
| 0 | | 1 | | | | | |
| 14 | | | 1 | | | | |
| 34 | | | | 1 | | | |
| 2 | | | | | 1 | | |
| 123 | | | | | | 1 | |
| 124 | | | | | | | 1 |

$$= b$$

| | | | | |
|-----|---|----|-----|-----|
| | 0 | 34 | 123 | 124 |
| 0 | | | | |
| 34 | | -I | | |
| 123 | | | -I | |
| 124 | | | | |

$$\lambda_3 \sim$$

| | | | | | | | | | | | | | |
|------|----|----|----|---|----|----|----|---|---|---|-----|-----|-----|
| | 32 | 13 | 21 | 0 | 42 | 14 | 34 | 1 | 2 | 3 | 123 | 234 | 124 |
| 32 | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | | | | | | | | | | | | | |
| 42 | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | | | | | |
| 1324 | | | | | | | | | | | | | |
| 34 | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | |
| 123 | | | | | | | | | | | | | |
| 134 | | | | | | | | | | | | | |
| 234 | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | |
| 124 | | | | | | | | | | | | | |

$$= i$$

| | | | | | | | |
|-----|----|---|----|----|---|-----|-----|
| | 13 | 0 | 14 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| 13 | | | | | | | |
| 0 | | 1 | | | | | |
| 14 | | | 1 | | | | |
| 34 | | | | 1 | | | |
| 2 | | | | | 1 | | |
| 123 | | | | | | 1 | |
| 124 | | | | | | | 1 |

$$= i$$

| | | | | |
|-----|---|----|-----|-----|
| | 0 | 34 | 123 | 124 |
| 0 | | | | |
| 34 | | -1 | | |
| 123 | | | 1 | |
| 124 | | | | |

$$\lambda_{14} \sim$$

| | | | |
|----|----|----|----|
| | | -1 | |
| | | 1 | |
| | -1 | | |
| | 1 | | |
| -1 | | | |
| 1 | | | 1 |
| | | | -1 |
| | | 1 | -1 |
| | | 1 | -1 |
| | | -1 | |

$$= b$$

| | |
|----|----|
| 1 | 1 |
| 1 | -1 |
| -1 | -1 |

$$= b$$

| | |
|---|----|
| A | |
| A | -A |

$$\lambda_{34} \sim$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | | |
| | 1 | | |
| | 1 | | |
| 1 | | | |
| | | | 1 |
| | | | 1 |
| | | | 1 |
| | | 1 | |
| | | 1 | |
| | | 1 | |

$$= 1$$

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 1 | 1 |
| | 1 |

$$= 1$$

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 1 | 1 |

$$\lambda_{42} \sim$$

| | | | |
|----|----|----|----|
| | | -1 | |
| | | -1 | |
| | | 1 | |
| | 1 | | |
| | -1 | | |
| -1 | | | |
| 1 | | | -1 |
| | | | -1 |
| | | 1 | |
| | | 1 | |
| | | -1 | |

$$= a$$

| | |
|----|----|
| 1 | 1 |
| -1 | -1 |
| | 1 |

$$= a$$

| | |
|----|----|
| -I | |
| I | -I |

$$\lambda_{123} \sim$$

| | | | |
|----|----|----|----|
| | | -1 | |
| | | -1 | |
| | | 1 | |
| | | 1 | |
| | | -1 | -1 |
| | | 1 | 1 |
| -1 | | | |
| -1 | | | |
| 1 | | | |
| 1 | | | |
| | -1 | | |

$$= 1$$

| | |
|----|----|
| -1 | 1 |
| 1 | -1 |
| | 1 |

$$= 1$$

| | |
|---|---|
| B | B |
| B | |

$$\lambda_{234} \sim$$

$$\begin{array}{c}
\lambda_{1324} \sim \\
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
32 & 13 & 0 & 42 \\
13 & 21 & 14 & 1324 \\
21 & 42 & 34 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 3 \\
42 & 123 & 234 & 124 \\
14 & 134 & 4 & \\
1324 & & &
\end{array} \\
\begin{array}{|c|c|c|c|}
| | | | |
| --- | --- | --- | --- |
| | 1 | | |
| -1 | -1 | | |
| 1 | | | |
| -1 | | | |
| | | | -1 |
| | | | 1 |
| | | | -1 |
| | | 1 | |
| | | -1 | |
| | | 1 | |

\end{array}
\end{array}$$

2. Структурные матрицы ковариантной алгебры пространства-времени красных кварков $\mathbb{Q}(u, d)_{r_{left}}$

$$\Lambda^0 \sim$$

| | | | | |
|------|---|---|---|---|
| 32 | 1 | | | |
| 13 | 1 | | | |
| 21 | | 1 | | |
| 0 | | | 1 | |
| 42 | | 1 | | |
| 14 | | | 1 | |
| 1324 | | | | 1 |
| 34 | | | 1 | |
| 1 | | | | 1 |
| 2 | | | 1 | |
| 3 | | | | 1 |
| 123 | | | | 1 |
| 134 | | | 1 | |
| 234 | | | | 1 |
| 4 | | | | |
| 124 | | | | 1 |

$$= I$$

| | | | | | |
|----|---|----|---|-----|-----|
| 13 | 0 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| 1 | 1 | | | | |
| | 1 | | | | |
| | | 1 | | | |
| | | | 1 | | |
| | | | | 1 | |
| | | | | | 1 |

$$= I$$

| | | | |
|---|----|-----|-----|
| 0 | 34 | 123 | 124 |
| 1 | | | |
| | 1 | | |
| | | 1 | |
| | | | 1 |

$$\Lambda^2 \sim$$

| | | | | |
|------|----|----|----|----|
| 32 | | | -1 | |
| 13 | | | -1 | |
| 21 | | 1 | | |
| 0 | | | 1 | |
| 42 | | | | -1 |
| 14 | | | | -1 |
| 1324 | | | 1 | |
| 34 | | | | 1 |
| 1 | 1 | | | |
| 2 | | 1 | | |
| 3 | -1 | | | |
| 123 | -1 | | | |
| 134 | | 1 | | |
| 234 | | | 1 | |
| 4 | | -1 | | |
| 124 | | | -1 | |

$$= I$$

| | | | | | |
|----|----|----|----|-----|-----|
| 13 | 0 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| 1 | | -1 | | | |
| | 1 | | -1 | | |
| | -1 | | 1 | | |
| | | 1 | | | |
| | | | -1 | | |

$$= I$$

| | | | |
|---|----|-----|-----|
| 0 | 34 | 123 | 124 |
| | | -I | |
| | I | | |
| | | | -I |

$$\Lambda^1 \sim$$

| | | | | | |
|------|----|----|----|----|----|
| 32 | | | | -1 | |
| 13 | | | | 1 | |
| 21 | | | | -1 | |
| 0 | | | 1 | | |
| 42 | | | | | -1 |
| 14 | | | | | 1 |
| 1324 | | | | | -1 |
| 34 | | | | 1 | |
| 1 | 1 | | | | |
| 2 | | -1 | | | |
| 3 | | 1 | | | |
| 123 | -1 | | | | |
| 134 | | | 1 | | |
| 234 | | | | -1 | |
| 4 | | | 1 | | |
| 124 | | | -1 | | |

$$= i$$

| | | | | | |
|----|---|----|---|-----|-----|
| 13 | 0 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| | | -1 | | | |
| | | -1 | | | |
| | 1 | | | | |
| 1 | | | | | |
| | | | 1 | | |

$$= i$$

| | | | |
|---|----|-----|-----|
| 0 | 34 | 123 | 124 |
| | | A | |
| A | | | -A |
| | A | | |

$$\Lambda^3 \sim$$

| | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|
| 32 | | | 1 | | |
| 13 | | | 1 | | |
| 21 | | | | 1 | |
| 0 | | | | 1 | |
| 42 | | | | | 1 |
| 14 | | | | 1 | |
| 1324 | | | | | 1 |
| 34 | | | | | |
| 1 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | | | | |
| 3 | | 1 | | | |
| 123 | | 1 | | | |
| 134 | | | 1 | | |
| 234 | | | 1 | | |
| 4 | | | | 1 | |
| 124 | | | | 1 | |

$$= a$$

| | | | | | |
|----|---|----|---|-----|-----|
| 13 | 0 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| | | 1 | | | |
| | | 1 | | | |
| | 1 | | 1 | | |
| 1 | | | | | |
| | | | 1 | | |

$$= a$$

| | | | |
|---|----|-----|-----|
| 0 | 34 | 123 | 124 |
| | | 1 | |
| 1 | | | 1 |
| | 1 | | |

$$\begin{array}{c}
\Lambda^{13} \sim \\
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
13 & 21 & 0 & 42 \\
14 & 1324 & 1 & 2 \\
123 & 234 & 124 & 4 \\
32 & 1 & 3 & 134
\end{array} \\
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
\begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} &
\begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ 1 \\ \\ -1 \\ 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ -1 \end{array} &
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ -1 \\ 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ 1 \\ -1 \\ \\ 1 \\ -1 \end{array} \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

$$\Lambda^{32} \sim$$

[illegible]

$$\begin{array}{c}
\Lambda^{123} \sim \\
\begin{array}{cccc}
\begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 1 & \\ \hline & & -1 & \\ \hline & & -1 & 1 \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 34 \quad 2 \quad 123 \quad 124 \\ 14 \quad 134 \end{array} \\
\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 1 & \\ \hline & & -1 & \\ \hline & & -1 & 1 \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} \end{array} \\
= b \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline 1 & -1 \\ \hline & 1 \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\Lambda^{124} \sim \\
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
& \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 14 \quad 34 \\ 32 \quad 21 \quad 42 \quad 1324 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 123 \quad 234 \quad 124 \\ 3 \quad 134 \quad 4 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ -1 \\ -1 \\ \square \\ \square \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ 1 \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array}
\end{array} \\
\\
= 1 \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 34 \\ 14 \quad 2 \quad 123 \quad 124 \\ 134 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \square \end{array} \end{array} \\
= 1 \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 0 \quad 34 \quad 124 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} B \\ B \end{array} & \begin{array}{c} B \\ \square \end{array} \end{array}
\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\Lambda^{234} \sim \\
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
& \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 14 \quad 34 \\ 32 \quad 21 \quad 42 \quad 1324 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 123 \quad 234 \quad 124 \\ 3 \quad 134 \quad 4 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \square \\ -1 \\ \square \\ \square \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ 1 \\ \square \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array}
\end{array} \\
\\
= b \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 34 \\ 14 \quad 2 \quad 123 \quad 124 \\ 134 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \end{array} \\
= b \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 0 \quad 34 \quad 124 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} B \\ I \end{array} & \begin{array}{c} -I \\ \square \end{array} \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\Lambda^{134} \sim \\
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
& \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 14 \quad 34 \\ 32 \quad 21 \quad 42 \quad 1324 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 123 \quad 234 \quad 124 \\ 3 \quad 134 \quad 4 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ 1 \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array}
\end{array} \\
\\
= a \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 34 \\ 14 \quad 2 \quad 123 \quad 124 \\ 134 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \square \end{array} \end{array} \\
= a \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 0 \quad 34 \quad 124 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} -A \\ -A \end{array} & \begin{array}{c} A \\ \square \end{array} \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\Lambda^{1324} \sim \\
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
& \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 14 \quad 34 \\ 32 \quad 21 \quad 42 \quad 1324 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 123 \quad 234 \quad 124 \\ 3 \quad 134 \quad 4 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ -1 \\ \square \\ \square \\ -1 \\ \square \\ \square \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ 1 \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array}
\end{array} \\
\\
= a \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 34 \\ 14 \quad 2 \quad 123 \quad 124 \\ 134 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ -1 \end{array} \end{array} \\
= a \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 0 \quad 34 \quad 124 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} B \\ B \end{array} & \begin{array}{c} B \\ B \end{array} \end{array}
\end{array}$$

3. Действительное представление алгебры кварков \mathbb{Q}_4

Структурные матрицы C^L_{KI} в действительном представлении вычислены по алгоритму, приведенному в Разделе II 2 Лекции 12, для принятого ранее порядка индексов. При этом слагаемые вектора ψ записываются в следующей последовательности

$$\begin{aligned}\psi = & \lambda_{32} \psi^{32} + \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0 + \\ & \lambda_{42} \psi^{42} + \lambda_{14} \psi^{14} + \lambda_{1324} \psi^{1324} + \lambda_{34} \psi^{34} + \\ & \lambda_1 \psi^1 + \lambda_2 \psi^2 + \lambda_3 \psi^3 + \lambda_{123} \psi^{123} + \\ & \lambda_{134} \psi^{134} + \lambda_{234} \psi^{234} + \lambda_4 \psi^4 + \lambda_{124} \psi^{124}.\end{aligned}$$

В результате получим действительные структурные матрицы λ_I размерности 16×16 . Помимо действительного представления мы использовали a -представление.

4. iab -представление алгебры кварков \mathbb{Q}_4

iab -представление основано на следующем разложении вектора:

$$\begin{aligned}\psi = & \lambda_{13} \circ (\lambda_{21} \psi^{32} + \lambda_0 \psi^{13}) + \lambda_0 \circ (\lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0) + \\ & \lambda_{14} \circ (\lambda_{21} \psi^{42} + \lambda_0 \psi^{14}) + \lambda_{34} \circ (\lambda_{21} \psi^{1324} + \lambda_0 \psi^{34}) + \\ & \lambda_2 \circ (\lambda_{21} \psi^1 + \lambda_0 \psi^2) + \lambda_{123} \circ (\lambda_{21} \psi^3 + \lambda_0 \psi^{123}) + \\ & \lambda_{234} \circ (\lambda_{21} \psi^{134} + \lambda_0 \psi^{234}) + \lambda_{124} \circ (\lambda_{21} \psi^4 + \lambda_0 \psi^{124}).\end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры \mathbb{Q}_4 в виде произведения $\mathbb{Q}_3 \times \mathbb{Q}_1$ (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры \mathbb{Q}_3 являются

$$\lambda_{13}, \lambda_0, \lambda_{14}, \lambda_{34}, \lambda_2, \lambda_{123}, \lambda_{234}, \lambda_{124};$$

базисными векторами алгебры \mathbb{Q}_1 являются

$$\lambda_{21}, \lambda_0.$$

Как и прежде поставим в соответствие базисному вектору λ_{21} алгебры \mathbb{Q}_1 мнимую единицу, а базисному вектору λ_0 действительную единицу. В результате получим вектор алгебры \mathbb{Q}_4 в iab -представлении имеет вид

$$\begin{aligned}\psi = & \lambda_{13} \circ (i \psi^{32} + \psi^{13}) + \lambda_0 \circ (i \psi^{21} + \psi^0) + \\ & \lambda_{14} \circ (i \psi^{42} + \psi^{14}) + \lambda_{34} \circ (i \psi^{1324} + \psi^{34}) + \\ & \lambda_2 \circ (i \psi^1 + \psi^2) + \lambda_{123} \circ (i \psi^3 + \psi^{123}) + \\ & \lambda_{234} \circ (i \psi^{134} + \psi^{234}) + \lambda_{124} \circ (i \psi^4 + \psi^{124}).\end{aligned}$$

Таким образом, в iab -представлении координаты (компоненты) вектора являются комплексными числами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned}\psi^{13} &= i \psi^{32} + \psi^{13}, & \psi^0 &= i \psi^{21} + \psi^0, \\ \psi^{14} &= i \psi^{42} + \psi^{14}, & \psi^{34} &= i \psi^{1324} + \psi^{34}, \\ \psi^2 &= i \psi^1 + \psi^2, & \psi^{123} &= i \psi^3 + \psi^{123}, \\ \psi^{234} &= i \psi^{134} + \psi^{234}, & \psi^{124} &= i \psi^4 + \psi^{124}.\end{aligned}\quad (9)$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$\begin{aligned}\psi = & \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_0 \psi^0 + \lambda_{14} \psi^{14} + \lambda_{34} \psi^{34} + \\ & \lambda_2 \psi^2 + \lambda_{123} \psi^{123} + \lambda_{234} \psi^{234} + \lambda_{124} \psi^{124}.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что в iab -представлении вектор ψ проецируется на направления $\lambda_{13}, \lambda_0, \lambda_{14}, \lambda_{34}, \lambda_2, \lambda_{123}, \lambda_{234}, \lambda_{124}$.

В iab -представлении структурные матрицы 8×8 имеют размерность (см. Раздел II 2).

5. IAB -представление алгебры кварков \mathbb{Q}_4

IAB -представление алгебры \mathbb{Q}_4 основано на разложении вектора:

$$\begin{aligned}\psi = & (\lambda_{32} \psi^{32} + \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0) \circ \lambda_0 + \\ & (\lambda_{32} \psi^{42} + \lambda_{13} \psi^{14} + \lambda_{21} \psi^{1324} + \lambda_0 \psi^{34}) \circ \lambda_{34} + \\ & (\lambda_{32} \psi^1 + \lambda_{13} \psi^2 + \lambda_{21} \psi^3 + \lambda_0 \psi^{123}) \circ \lambda_{123} + \\ & (\lambda_{32} \psi^{134} + \lambda_{13} \psi^{234} + \lambda_{21} \psi^4 + \lambda_0 \psi^{124}) \circ \lambda_{124}.\end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры \mathbb{Q}_4 в виде произведения $\mathbb{Q}_2 \times \mathbb{Q}_2$. Базисными векторами одной алгебры \mathbb{Q}_2 являются

$$\lambda_0, \lambda_{34}, \lambda_{123}, \lambda_{124};$$

базисными векторами другой алгебры \mathbb{Q}_2 являются

$$\lambda_{32}, \lambda_{13}, \lambda_{21}, \lambda_0.$$

Последнюю алгебру мы назвали IAB -алгеброй. Эта алгебра аналогична алгебре кватернионов. Для базисных единиц IAB -алгебры используем следующие обозначения

$$a \cdot I, \quad b \cdot A, \quad i \cdot B, \quad \mathbb{1}.$$

Заменим базисные векторы $\lambda_{32}, \lambda_{13}, \lambda_{21}, \lambda_0$ приведенными гиперчислами в соответствии

$$\begin{aligned}\lambda_{32} &\sim a I, \\ \lambda_{13} &\sim b A, \\ \lambda_{21} &\sim i B, \\ \lambda_0 &\sim \mathbb{1} \mathbb{1}.\end{aligned}$$

Получим вектор алгебры \mathbb{Q}_4 в IAB -представлении

$$\begin{aligned}\psi = & (a \cdot I \psi^{32} + b \cdot A \psi^{13} + i \cdot B \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0) \circ \lambda_0 + \\ & (a \cdot I \psi^{42} + b \cdot A \psi^{14} + i \cdot B \psi^{1324} + \mathbb{1} \psi^{34}) \circ \lambda_{34} + \\ & (a \cdot I \psi^1 + b \cdot A \psi^2 + i \cdot B \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}) \circ \lambda_{123} + \\ & (a \cdot I \psi^{134} + b \cdot A \psi^{234} + i \cdot B \psi^4 + \mathbb{1} \psi^{124}) \circ \lambda_{124}.\end{aligned}$$

Таким образом, в IAB -представлении координаты (компоненты) вектора являются гиперчислами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned}\Psi^0 &= a I \psi^{32} + b A \psi^{13} + i B \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0, \\ \Psi^{34} &= a I \psi^{42} + b A \psi^{14} + i B \psi^{1324} + \mathbb{1} \psi^{34}, \\ \Psi^{123} &= a I \psi^1 + b A \psi^2 + i B \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}, \\ \Psi^{124} &= a I \psi^{134} + b A \psi^{234} + i B \psi^4 + \mathbb{1} \psi^{124}.\end{aligned}\quad (10)$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$\psi = \Psi^0 \lambda_0 + \Psi^{34} \lambda_{34} + \Psi^{123} \lambda_{123} + \Psi^{124} \lambda_{124}.$$

Отсюда видно, что в IAB -представлении вектор ψ проецируется на направления $\lambda_0, \lambda_{34}, \lambda_{123}, \lambda_{124}$.

В IAB -представлении структурные матрицы имеют размерность 4×4 (см. Раздел II).

III. УРАВНЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ СВОБОДНЫХ КВАРКОВ

Мы вычислили структурные матрицы алгебры кварков и теперь вернемся к результатам Лекции 1. Согласно этой Лекции: если действие некоторого объекта является алгеброй, то такому объекту присущи квантовые явления, а уравнения структуры этой алгебры можно рассматривать как квантовые постулаты. Квантовые постулаты для произвольной алгебры действия были записаны следующим образом

$$\partial_M \psi^L = \frac{1}{S_0} C^L_{KI} \cdot p^I_M \cdot \psi^K. \quad (11)$$

Здесь ∂_M – оператор дифференцирования по обобщенной координате, p^I_M – координаты обобщенного импульса, C^L_{KI} – структурные постоянные алгебры действия, S_0 – действительная постоянная величина, имеющая размерность действия. В последующих Лекциях мы ввели алгебру Клиффорда как алгебру действия и связали ее с лептонами. При этом постоянную величину S_0 мы отождествили с постоянной Планка. Если бы нам удалось найти несколько алгебр действия, то мы имели бы несколько объектов, подчиняющихся квантовым явлениям разного типа.

Теперь мы ввели новый объект – кварки, которым сопоставили свою алгебру действия и алгебру пространства-времени. И согласно предыдущему кварки подчиняются своей квантовой теории. Уравнения (11) будут квантовыми постулатами для кварков, если в них положить постоянные C^L_{KI} равными структурным постоянным алгебры кварков и установить значение S_0 . При этом возникает вопрос: нужно ли связывать постоянную Планка только с лептонами и соответственно с алгеброй Клиффорда, а для алгебры кварков вводить другую постоянную с размерностью действия, или постоянная Планка является универсальной? А priori ответить на этот вопрос нельзя. Поэтому для кварков мы введем свою постоянную действия, значение которой предстоит установить, и обозначим ее через q .

Аналогично Разделу II Лекции 9 придадим соотношению (11) форму уравнения Дирака. Для этого умножим его обе части на структурные постоянные C^{MN}_L . Получим

$$C^{MN}_L \cdot \partial_M \psi^L(x) = \frac{1}{q} C^{MN}_L \cdot C^L_{KI} \cdot p^I_M \cdot \psi^K. \quad (12)$$

С нашей точки зрения это уравнение и есть уравнение релятивистской квантовой механики для кварков в самом общем виде. Далее, повторяя рассуждения Раздела II Лекции 9, запишем это уравнение при следующих ограничениях: дифференцирование выполняется только по координатам образующего пространства и условию, что в первом сжатом представлении коэффициент при волновой функции в правой части принимает вид

$$-\frac{m_d c}{q}.$$

Здесь m_d есть масса d -кварка. В результате получим следующее уравнение

$$C^{mN}_L \cdot \partial_m \psi^L(x) = \frac{1}{q} (C^N_{K0} p^0_0 + C^N_{K34} p^{34}_0) \cdot \psi^K. \quad (13)$$

При этом имеет место условие *

$$p^0_0 + p^{34}_0 = -m_d c. \quad (14)$$

Разобьем величину $m_d c$ между импульсами p^0_0 и p^{34}_0 в некоторой пропорции. Для этого положим

$$p^0_0 = -\frac{m_d c}{2} \alpha, \quad p^{34}_0 = -\frac{m_d c}{2} \beta.$$

Из (14) имеем

$$\alpha + \beta = 2. \quad (15)$$

Кроме того, положим

$$\beta - \alpha = 2 \frac{m_u}{m_d}. \quad (16)$$

Здесь m_u масса u -кварка. После подстановки импульсов получим

$$C^{mN}_L \cdot \partial_m \psi^L(x) = -\frac{m_d c}{2q} (\alpha \cdot C^N_{K0} + \beta \cdot C^N_{K34}) \cdot \psi^K. \quad (17)$$

Понятно, что здесь $C^N_{K0} = \delta^N_K$ в отличие от C^N_{K34} .

1. Уравнение для красных кварков первого поколения

Уравнение релятивистской квантовой механики для свободных красных кварков первого поколения получим, подставив в уравнение (17) структурные матрицы, выведенные в Разделе II. Для действительного

* См. Раздел II Лекции 9.

регулярного представления алгебры кварков $\mathbb{Q}(u, d)$ компоненты волновой функции $\psi^K(x)$ представляют собой шестнадцать действительных функций. В iab -представлении волновая функция содержит восемь компонент вида (9). И в IAB -представлении компонентами волновой функции являются четыре IAB -функции вида (10). Приведем уравнения квантовой механики по отношению к IAB -компонентам волновой функции кварков:

$$\begin{pmatrix} -i \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \partial_4 + i \begin{pmatrix} & & -A \\ & -A & \\ A & & \end{pmatrix} \partial_1 + \\ \begin{pmatrix} & -I \\ I & -I \\ I & \end{pmatrix} \partial_2 + a \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \partial_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{pmatrix} = -\frac{m_d c}{2q} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \\ \beta & \alpha & \\ & \alpha & \beta \\ & \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{pmatrix}$$

Или

$$\begin{aligned} i \partial_4 \Psi^{124} &+ (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \Psi^{123} \\ &= \frac{m_d c}{2q} (\alpha \cdot \Psi^0 + \beta \cdot \Psi^{34}), \\ i \partial_4 \Psi^{123} &+ (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \Psi^{124} \\ &= \frac{m_d c}{2q} (\beta \cdot \Psi^0 + \alpha \cdot \Psi^{34}), \\ i \partial_4 \Psi^{34} &- (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \Psi^0 \\ &= \frac{m_d c}{2q} (\alpha \cdot \Psi^{123} + \beta \cdot \Psi^{124}), \\ i \partial_4 \Psi^0 &- (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \Psi^{34} \\ &= \frac{m_d c}{2q} (\beta \cdot \Psi^{123} + \alpha \cdot \Psi^{124}). \end{aligned} \quad (18)$$

2. Стандартное представление уравнения квантовой механики для красных u и d кварков.

Преобразуем уравнения (18) следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым а третье с четвертым. Получим

$$\begin{aligned} i \partial_4 \varphi_2 + (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \varphi_2 &= \frac{m_d c}{2q} (\alpha + \beta) \varphi_1, \\ i \partial_4 \varphi_1 - (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \varphi_1 &= \frac{m_d c}{2q} (\alpha + \beta) \varphi_2, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{34}$ и $\varphi_2 = \Psi^{123} + \Psi^{124}$. Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$i \partial_4 \chi_2 + (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \chi_2 = \frac{m_d c}{2q} (\beta - \alpha) \chi_1,$$

$$i \partial_4 \chi_1 - (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \chi_1 = \frac{m_d c}{2q} (\beta - \alpha) \chi_2, \quad (20)$$

где $\chi_1 = \Psi^{123} - \Psi^{124}$ и $\chi_2 = \Psi^0 - \Psi^{34}$.

Или с учетом (15) и (16)

$$\begin{aligned} i \partial_4 \varphi_2 + (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \varphi_2 &= \frac{m_d c}{q} \varphi_1, \\ i \partial_4 \varphi_1 - (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \varphi_1 &= \frac{m_d c}{q} \varphi_2, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} i \partial_4 \chi_2 + (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \chi_2 &= \frac{m_u c}{q} \chi_1, \\ i \partial_4 \chi_1 - (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \chi_1 &= \frac{m_u c}{q} \chi_2, \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, система из четырех уравнений преобразуется в две системы из двух уравнений. Одна из систем представляет уравнение для частицы с массой m_d , а другая представляет уравнение для частицы с массой m_u . Отсюда вытекает следующая интерпретация компонент волновой функции. Для красного d кварка левая компонента $d_L = \Psi^0 + \Psi^{34}$ и правая компонента $d_R = \Psi^{123} + \Psi^{124}$, а для красного u кварка $u_L = \Psi^{123} - \Psi^{124}$ и $u_R = \Psi^0 - \Psi^{34}$.

3. Уравнение для желтых кварков первого поколения

Уравнение релятивистской квантовой механики для свободных желтых кварков первого поколения получим, подставив в уравнение (17) структурные матрицы, выведенные в Приложении А. Для действительного регулярного представления алгебры кварков $\mathbb{Q}(u, d)$ компоненты волновой функции $\psi^K(x)$ представляют собой шестнадцать действительных функций. В iab -представлении волновая функция содержит восемь компонент вида (9). И в IAB -представлении компонентами волновой функции являются четыре IAB -функции вида (10). Приведем уравнения квантовой механики по отношению к IAB -компонентам волновой функции кварков:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & B \\ a & B \\ -B & \end{pmatrix} \partial_4 + i \begin{pmatrix} & -A \\ & -A \\ A & \end{pmatrix} \partial_1 + \\ \begin{pmatrix} & -I \\ I & -I \\ I & \end{pmatrix} \partial_2 + a \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \partial_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{pmatrix} = -\frac{m_d c}{2q} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \\ \beta & \alpha & \\ & \alpha & \beta \\ & \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{pmatrix}$$

Или

$$\begin{aligned}
& -a B \partial_4 \Psi^{124} + (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \Psi^{123} \\
& = \frac{m_d c}{2q} (\alpha \cdot \Psi^0 + \beta \cdot \Psi^{34}), \\
& -a B \partial_4 \Psi^{123} + (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \Psi^{124} \\
& = \frac{m_d c}{2q} (\beta \cdot \Psi^0 + \alpha \cdot \Psi^{34}), \\
& a B \partial_4 \Psi^{34} - (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \Psi^0 \\
& = \frac{m_d c}{2q} (\alpha \cdot \Psi^{123} + \beta \cdot \Psi^{124}), \\
& a B \partial_4 \Psi^0 - (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \Psi^{34} \\
& = \frac{m_d c}{2q} (\beta \cdot \Psi^{123} + \alpha \cdot \Psi^{124}).
\end{aligned} \tag{23}$$

4. Стандартное представление уравнения квантовой механики для желтых u и d кварков.

Преобразуем уравнения (23) следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым а третье с четвертым. Получим

$$\begin{aligned}
& -a B \partial_4 \varphi_2 + (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \varphi_2 = \frac{m_d c}{2q} (\alpha + \beta) \varphi_1, \\
& a B \partial_4 \varphi_1 - (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \varphi_1 = \frac{m_d c}{2q} (\alpha + \beta) \varphi_2,
\end{aligned} \tag{24}$$

где $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{34}$ и $\varphi_2 = \Psi^{123} + \Psi^{124}$. Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$\begin{aligned}
& a B \partial_4 \chi_2 + (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \chi_2 = \frac{m_d c}{2q} (\beta - \alpha) \chi_1, \\
& -a B \partial_4 \chi_1 - (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \chi_1 = \frac{m_d c}{2q} (\beta - \alpha) \chi_2,
\end{aligned} \tag{25}$$

где $\chi_1 = \Psi^0 - \Psi^{34}$ и $\chi_2 = \Psi^{123} - \Psi^{124}$.

Или с учетом (15) и (16)

$$\begin{aligned}
& -a B \partial_4 \varphi_2 + (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \varphi_2 = \frac{m_d c}{q} \varphi_1, \\
& a B \partial_4 \varphi_1 - (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \varphi_1 = \frac{m_d c}{q} \varphi_2,
\end{aligned} \tag{26}$$

и

$$\begin{aligned}
& a B \partial_4 \chi_2 + (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \chi_2 = \frac{m_u c}{q} \chi_1, \\
& -a B \partial_4 \chi_1 - (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \chi_1 = \frac{m_u c}{q} \chi_2,
\end{aligned} \tag{27}$$

Таким образом, система из четырех уравнений преобразуется в две системы из двух уравнений. Одна из

систем представляет уравнение для частицы с массой m_d , а другая представляет уравнение для частицы с массой m_u . Отсюда вытекает следующая интерпретация компонент волновой функции. Для желтого d кварка левая компонента $d_L = \Psi^0 + \Psi^{34}$ и правая компонента $d_R = \Psi^{123} + \Psi^{124}$, а для желтого u кварка $u_L = \Psi^{123} - \Psi^{124}$ и $u_R = \Psi^0 - \Psi^{34}$.

5. Уравнение для синих кварков первого поколения

Уравнение релятивистской квантовой механики для свободных синих кварков первого поколения получим, подставив в уравнение (17) структурные матрицы, выведенные в Приложении В. Для действительного регулярного представления алгебры кварков $\mathbb{Q}(u, d)$ компоненты волновой функции $\psi^K(x)$ представляют собой шестнадцать действительных функций. В iab -представлении волновая функция содержит восемь компонент вида (9). И в IAB -представлении компонентами волновой функции являются четыре IAB -функции вида (10). Приведем уравнения квантовой механики по отношению к IAB -компонентам волновой функции кварков:

$$\begin{aligned}
& \left(a \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array} \partial_4 + i \begin{array}{|c|c|} \hline & -A \\ \hline A & -A \\ \hline \end{array} \partial_1 + \right. \\
& \left. \begin{array}{|c|c|} \hline & -I \\ \hline I & \\ \hline \end{array} \partial_2 + a \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \partial_3 \right) \begin{pmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{pmatrix} = \\
& = -\frac{m_d c}{2q} \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & -\beta \\ \hline \beta & \alpha \\ \hline \end{array} \begin{pmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned}
& -a \partial_4 \Psi^{124} + (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \Psi^{123} \\
& = \frac{m_d c}{2q} (\alpha \cdot \Psi^0 - \beta \cdot \Psi^{34}), \\
& a \partial_4 \Psi^{123} + (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \Psi^{124} \\
& = \frac{m_d c}{2q} (\beta \cdot \Psi^0 + \alpha \cdot \Psi^{34}), \\
& -a \partial_4 \Psi^{34} - (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \Psi^0 \\
& = \frac{m_d c}{2q} (\alpha \cdot \Psi^{123} - \beta \cdot \Psi^{124}), \\
& a \partial_4 \Psi^0 - (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \Psi^{34} \\
& = \frac{m_d c}{2q} (\beta \cdot \Psi^{123} + \alpha \cdot \Psi^{124}).
\end{aligned} \tag{28}$$

6. Стандартное представление уравнения квантовой механики для синих u и d кварков.

Преобразуем уравнения (28) следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым а третье с четвертым. Получим

$$\begin{aligned} a \partial_4 \chi_1 + (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \varphi_2 &= \frac{m_1 c}{2q} \varphi_1 + \frac{m_2 c}{2q} \chi_2, \\ a \partial_4 \chi_2 - (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \varphi_1 &= \frac{m_1 c}{2q} \varphi_2 + \frac{m_2 c}{2q} \chi_1, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{34}$ и $\varphi_2 = \Psi^{123} + \Psi^{124}$, $\chi_1 = \Psi^0 - \Psi^{34}$ и $\chi_2 = \Psi^{123} - \Psi^{124}$, $m_1 = m_d \alpha$, $m_2 = m_d \beta$.

Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$\begin{aligned} a \partial_4 \varphi_1 + (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \chi_2 &= -\frac{m_1 c}{2q} \chi_1 + \frac{m_2 c}{2q} \varphi_2, \\ a \partial_4 \varphi_2 - (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \chi_1 &= -\frac{m_1 c}{2q} \chi_2 + \frac{m_2 c}{2q} \varphi_1, \end{aligned} \quad (30)$$

Мы столкнулись со странным обстоятельством: система уравнений для синих кварков не разделяется на две системы, которые относились бы к разным частицам – верхней и нижней. Отметим этот вопрос и оставим его открытым.

IV. ВЫВОДЫ.

- Цветовые разновидности кварков ставятся в соответствие перестановочным соотношениям с участием базисного вектора времени и геометрических базисных векторов.
- В принятом понимании цвета кварки имеют три цветовые разновидности – красные, желтые, синие.
- Из алгебраической структуры векторов действия кварков следуют квантовые постулаты и теория квантовых явлений этих частиц. В общем случае нет оснований считать, что квантовые явления с участием кварков определяются постоянной Планка, а не другой постоянной величиной, имеющей размерность действия.
- Структура квантовых уравнений для свободных кварков такова, что они разделяются на две системы уравнений. Таким образом, мы имеем две частицы, одна из которых это верхний кварк, а другая – нижний кварк.

- Уравнения для верхних и нижних кварков отличаются не только массами частиц, но и знаком одной из компонент оператора импульса. Таким образом, в отличие от лептонов, движение в пространстве нижних кварков отличается от движения верхних кварков.
- Структура квантовых уравнений для свободных кварков такова, что волновые функции кварков разделяются на две компоненты – правую и левую подобно тому как это имеет место для лептонов. Такое разделение необходимо для описания электрослабого взаимодействия кварков.
- Правила формирования правых и левых компонент волновой функции для красных и желтых частиц отличаются от аналогичных правил для синих частиц. В первом случае для нижних частиц $\Psi_L = \Psi^0 + \Psi^{34}$ и $\Psi_R = \Psi^{123} + \Psi^{124}$, а для верхних частиц $\Psi_R = \Psi^0 - \Psi^{34}$ и $\Psi_L = \Psi^{123} - \Psi^{124}$, во втором случае указанные компоненты не относятся к разным частицам.

ПРИЛОЖЕНИЕ А: АЛГЕБРА ЖЕЛТЫХ U И D -КВАРКОВ $\mathbb{Q}(U, D)_Y$

1. Базисные векторы и их произведения

Укажем базисные векторы алгебры $\mathbb{Q}(u, d)_Y$ и правила умножения, которым они подчиняются.

- λ_0 – базисный вектор скалярной части вектора. Для λ_0 имеет место правило умножения

$$\lambda_0 \circ \lambda_0 = \lambda_0 .$$

- Образующие векторы λ_i , где индекс i пробегает значения от 1 до 4, есть базисные векторы пространства-времени СТО. Число векторов λ_i равно четырем. Для них имеют место правила умножения

$$\lambda_i \circ \lambda_0 = \lambda_0 \circ \lambda_i = \lambda_i .$$

$$\lambda_i \circ \lambda_i = \text{sign } \lambda_i ,$$

где

$$\text{sign } \lambda_1 = \text{sign } \lambda_2 = \text{sign } \lambda_3 = -\text{sign } \lambda_4 = \lambda_0 .$$

- Векторы

$$\lambda_{ik} = \lambda_k \circ \lambda_i .$$

Здесь $i \neq k$. Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6 .$$

В соответствии с Разделом I Лекции 12 и Разделом I настоящей Лекции для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей (перестановочные соотношения)

$$\begin{aligned} \lambda_{21} &= -\lambda_{12} , & \lambda_{13} &= \lambda_{31} , & \lambda_{32} &= -\lambda_{23} , \\ \lambda_{14} &= \lambda_{41} , & \lambda_{24} &= -\lambda_{42} , & \lambda_{34} &= -\lambda_{43} . \end{aligned}$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и перестановочных соотношений. В частности, имеем

$$\begin{aligned} \lambda_{21} \circ \lambda_{21} &= -\lambda_0 , & \lambda_{42} \circ \lambda_{42} &= \lambda_0 , \\ \lambda_{32} \circ \lambda_{32} &= -\lambda_0 , & \lambda_{14} \circ \lambda_{14} &= -\lambda_0 , \\ \lambda_{13} \circ \lambda_{13} &= \lambda_0 , & \lambda_{34} \circ \lambda_{34} &= \lambda_0 . \end{aligned}$$

- Векторы

$$\lambda_{ikl} = \lambda_l \circ \lambda_k \circ \lambda_i .$$

Здесь

$$i \neq k, i \neq l, k \neq l .$$

Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4 .$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из перестановочных соотношений

$$\begin{aligned} \lambda_{123} &= -\lambda_{213} = -\lambda_{231} = \lambda_{321} = -\lambda_{312} = -\lambda_{132} , \\ \lambda_{124} &= -\lambda_{214} = -\lambda_{241} = \lambda_{421} = -\lambda_{412} = -\lambda_{142} , \\ \lambda_{134} &= \lambda_{314} = \lambda_{341} = -\lambda_{431} = -\lambda_{413} = -\lambda_{143} , \\ \lambda_{234} &= -\lambda_{324} = \lambda_{342} = -\lambda_{432} = \lambda_{423} = -\lambda_{243} . \end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\begin{aligned} \lambda_{123} \circ \lambda_{123} &= \lambda_0 , & \lambda_{124} \circ \lambda_{124} &= -\lambda_0 , \\ \lambda_{134} \circ \lambda_{134} &= -\lambda_0 , & \lambda_{234} \circ \lambda_{234} &= \lambda_0 . \end{aligned}$$

- Вектор

$$\lambda_{1324} = \lambda_1 \circ \lambda_3 \circ \lambda_2 \circ \lambda_4 .$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из перестановочных соотношений

$$\begin{aligned} \lambda_{1234} &= -\lambda_{2134} = -\lambda_{2314} = \lambda_{3214} = \\ &= -\lambda_{3124} = -\lambda_{1324} = -\lambda_{1243} = \lambda_{2143} = \\ &= \lambda_{2413} = -\lambda_{4213} = \lambda_{4123} = \lambda_{1423} = \\ &= -\lambda_{1342} = -\lambda_{3142} = -\lambda_{3412} = \lambda_{4312} = \\ &= \lambda_{4132} = -\lambda_{1432} = \lambda_{2341} = -\lambda_{3241} = \\ &= \lambda_{3421} = -\lambda_{4321} = \lambda_{4231} = -\lambda_{2431} . \end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений законов также следует

$$\lambda_{1324} \circ \lambda_{1324} = \lambda_0 .$$

2. Структурные матрицы алгебры желтых кварков $\mathbb{Q}(u, d)_y$

а. Структурные матрицы контравариантной алгебры действия желтых кварков $\mathbb{Q}(u, d)_{y, right}$

$$\lambda_0 \sim$$

| | | | | |
|------|---|---|---|---|
| 32 | 1 | | | |
| 13 | 1 | | | |
| 21 | | 1 | | |
| 0 | | | 1 | |
| 42 | | 1 | | |
| 14 | | | 1 | |
| 1324 | | | | 1 |
| 34 | | | 1 | |
| 1 | | | | 1 |
| 2 | | | 1 | |
| 3 | | | | 1 |
| 123 | | | | 1 |
| 134 | | | 1 | |
| 234 | | | | 1 |
| 4 | | | | |
| 124 | | | | 1 |

$$= I$$

| | | | | | |
|----|---|----|---|-----|-----|
| 13 | 0 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| 1 | 1 | | | | |
| | 1 | | | | |
| | | 1 | | | |
| | | | 1 | | |
| | | | | 1 | |
| | | | | | 1 |

| | | | |
|---|----|-----|-----|
| 0 | 34 | 123 | 124 |
| 1 | | | |
| | 1 | | |
| | | 1 | |
| | | | 1 |

$$= I$$

$$\lambda_1 \sim$$

| | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|
| 32 | | | | 1 | |
| 13 | | | | 1 | |
| 21 | | | | 1 | |
| 0 | | | 1 | | |
| 42 | | | | | 1 |
| 14 | | | | | 1 |
| 1324 | | | | 1 | |
| 34 | | | | | 1 |
| 1 | | 1 | | | |
| 2 | | 1 | | | |
| 3 | | 1 | | | |
| 123 | 1 | | | | |
| 134 | | | 1 | | |
| 234 | | | 1 | | |
| 4 | | | 1 | | |
| 124 | | 1 | | | |

$$= a$$

| | | | | | |
|----|---|----|---|-----|-----|
| 13 | 0 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| | | 1 | | | |
| | | 1 | | | |
| | | | 1 | | |
| | 1 | | | | |
| 1 | | | | | |
| | | | 1 | | |

| | | | |
|---|----|-----|-----|
| 0 | 34 | 123 | 124 |
| | | A | |
| A | | | |

$$= a$$

$$\lambda_2 \sim$$

| | | | | |
|------|----|----|----|----|
| 32 | | | 1 | |
| 13 | | | -1 | |
| 21 | | | -1 | |
| 0 | | | 1 | |
| 42 | | | | 1 |
| 14 | | | | -1 |
| 1324 | | | | -1 |
| 34 | | | | 1 |
| 1 | -1 | 1 | | |
| 2 | | | | |
| 3 | 1 | | | |
| 123 | -1 | | | |
| 134 | | -1 | 1 | |
| 234 | | | | |
| 4 | | 1 | | |
| 124 | | -1 | | |

$$= b$$

| | | | | | |
|----|----|----|----|-----|-----|
| 13 | 0 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| | | -1 | | | |
| | 1 | | -1 | | |
| -1 | | | 1 | | |
| | 1 | | | | |
| | -1 | | | | |

| | | | |
|---|----|-----|-----|
| 0 | 34 | 123 | 124 |
| | | -I | |
| I | | | |
| | I | | |

$$= b$$

$$\lambda_3 \sim$$

| | | | | |
|------|----|----|----|----|
| 32 | | | -1 | |
| 13 | | | 1 | |
| 21 | | | -1 | |
| 0 | | | 1 | |
| 42 | | | | 1 |
| 14 | | | | -1 |
| 1324 | | | | 1 |
| 34 | | | | -1 |
| 1 | 1 | | | |
| 2 | -1 | | | |
| 3 | | 1 | | |
| 123 | -1 | | | |
| 134 | | -1 | | |
| 234 | | 1 | | |
| 4 | | | -1 | |
| 124 | | | 1 | |

$$= i$$

| | | | | | |
|----|---|----|----|-----|-----|
| 13 | 0 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| | | -1 | | | |
| | | -1 | | | |
| | | | 1 | | |
| 1 | | | 1 | | |
| | 1 | | -1 | | |
| | | -1 | | | |

| | | | |
|---|----|-----|-----|
| 0 | 34 | 123 | 124 |
| | | -I | |
| I | | | |
| | I | | |

$$= i$$

$$\lambda_{13} \sim$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{32} &\sim \begin{array}{c} 32 \quad 13 \quad 0 \quad 42 \quad 14 \quad 34 \quad 1 \quad 2 \quad 123 \quad 234 \quad 124 \\ 32 \quad 13 \quad 21 \quad 0 \quad 42 \quad 14 \quad 1324 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 134 \quad 4 \end{array} \\
&\quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 1 & & \\ \hline & -1 & & \\ \hline & -1 & & \\ \hline & & -1 & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & -1 \\ \hline & & & -1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} \\
&= a \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 34 \quad 2 \quad 123 \quad 124 \\ 13 \quad 0 \quad 14 \quad 34 \quad 2 \quad 134 \end{array} \\
&\quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline -1 & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\
&= a \begin{array}{c} 0 \quad 34 \quad 123 \quad 124 \\ 0 \quad 34 \quad 123 \end{array} \\
&\quad \begin{array}{|c|c|} \hline I & \\ \hline -I & I \\ \hline & -I \\ \hline \end{array}
\end{aligned}$$

$$\lambda_{14} \sim$$

| | | | |
|----|----|----|----|
| | | 1 | |
| | | -1 | |
| | 1 | | |
| | -1 | | |
| -1 | 1 | | |
| 1 | | | -1 |
| | | | 1 |
| | | 1 | -1 |
| | | 1 | |
| | | -1 | |

$$= b$$

| | |
|----|----|
| -1 | |
| -1 | |
| 1 | |
| 1 | |
| | 1 |
| | -1 |
| | -1 |

$$= b$$

| | |
|----|----|
| -A | |
| A | |
| | A |
| | -A |

$$\lambda_{34} \sim$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | | |
| | 1 | | |
| | 1 | | |
| 1 | | | |
| | | | 1 |
| | | | 1 |
| | | | 1 |
| | | 1 | |
| | | 1 | |
| | | 1 | |

$$= 1$$

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 1 | |
| 1 | |
| 1 | |
| | 1 |
| | 1 |
| | 1 |

$$= 1$$

| | |
|----------|----------|
| <u>1</u> | |
| <u>1</u> | |
| | <u>1</u> |
| | <u>1</u> |

$$\lambda_{42} \sim$$

| | | | |
|----|---|----|----|
| | | -1 | |
| | | -1 | |
| | 1 | | |
| | 1 | | |
| -1 | | | |
| 1 | | | -1 |
| | | | 1 |
| | | 1 | |
| | | 1 | |
| | | -1 | |

$$= a$$

| | |
|----|----|
| 1 | |
| 1 | |
| -1 | |
| -1 | |
| | 1 |
| | 1 |
| | -1 |

$$= a$$

| | |
|----|----|
| -I | |
| I | |
| | -I |
| | I |

$$\lambda_{123} \sim$$

| | | | |
|----|--|----|----|
| | | -1 | |
| | | -1 | |
| | | 1 | |
| | | 1 | |
| | | | 1 |
| | | | 1 |
| | | | -1 |
| -1 | | | |
| -1 | | | |
| 1 | | | |

$$= 1$$

| | |
|----|----|
| -1 | |
| -1 | |
| 1 | |
| 1 | |
| | 1 |
| | 1 |
| | -1 |

$$= 1$$

| | |
|----------|----------|
| <u>B</u> | |
| <u>B</u> | |
| | <u>B</u> |
| | <u>B</u> |

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
32 & 13 & 0 & 42 \\
13 & 21 & 14 & 1324 \\
21 & 42 & 34 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 3 \\
42 & 123 & 234 & 124 \\
14 & 4 & & \\
1324 & & & \\
34 & & & \\
1 & & & \\
2 & & & \\
3 & & & \\
123 & & & \\
134 & & & \\
234 & & & \\
4 & & & \\
124 & & &
\end{array}
\sim
\begin{array}{|c|c|c|c|}
| | | | |
| --- | --- | --- | --- |
| | | | 1 |
| | | | -1 |
| | | 1 | 1 |
| | | -1 | |
| | -1 | 1 | |
| 1 | | | |
| -1 | | | |

\\
\\
\begin{array}{c}
13 \\
0 \\
14 \\
34 \\
2 \\
123 \\
134 \\
124
\end{array}
= b
\begin{array}{|c|c|}
| | -1 |
| 1 | 1 |
| -1 | |
| 1 | |
| -1 | |

\\
\\
\begin{array}{c}
13 \\
0 \\
14 \\
34 \\
2 \\
123 \\
234 \\
124
\end{array}
= b
\begin{array}{|c|c|}
| | -I |
| I | |

\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
32 & 13 & 0 & 14 & 34 & 1 \\
13 & 21 & 42 & 1324 & 2 & 3 \\
21 & 0 & 1 & 1 & 123 & 234 \\
0 & 42 & 14 & 34 & 134 & 4 \\
14 & 1 & 1 & 1 & 124 & \\
1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & \\
34 & 1 & 2 & 3 & 123 & \\
1 & 2 & 3 & 123 & 134 & \\
2 & 3 & 123 & 134 & 234 & \\
3 & 123 & 134 & 234 & 4 & \\
123 & 134 & 234 & 4 & 124 & \\
134 & 234 & 4 & 124 & & \\
234 & 4 & 124 & & & \\
4 & 124 & & & & \\
124 & & & & &
\end{array}
\end{array}
\sim
\begin{array}{|c|c|c|c|}
| | | | |
| --- | --- | --- | --- |
| | -1 | | |
| | 1 | | |
| | | 1 | |
| | | -1 | |
| -1 | | | |
| 1 | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | 1 |
| | | | -1 |
| | | | |
| | | | 1 |
| | | 1 | |
| | | -1 | |
| | | | 1 |
| | | | -1 |
| | | 1 | |$$

b. Структурные матрицы ковариантной алгебры пространства-времени желтых кварков $\mathbb{Q}(u, d)_{y_{left}}$

$$\Lambda^0 \sim$$

| | | | | | | | | | | | |
|------|----|----|---|----|----|----|---|---|-----|-----|-----|
| | 32 | 13 | 0 | 42 | 14 | 34 | 1 | 2 | 123 | 234 | 124 |
| 32 | 1 | | | | | | | | | | |
| 13 | | 1 | | | | | | | | | |
| 21 | | | 1 | | | | | | | | |
| 0 | | | | 1 | | | | | | | |
| 42 | | | | | 1 | | | | | | |
| 14 | | | | | | 1 | | | | | |
| 1324 | | | | | | | 1 | | | | |
| 34 | | | | | | | | 1 | | | |
| 1 | | | | | | | | | 1 | | |
| 2 | | | | | | | | | | 1 | |
| 3 | | | | | | | | | | | 1 |
| 123 | | | | | | | | | | | |
| 134 | | | | | | | | | | | |
| 234 | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | |
| 124 | | | | | | | | | | | |

$$= I$$

| | | | | | | |
|----|---|----|----|---|-----|-----|
| 13 | 0 | 14 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| 1 | | | | | | |
| | 1 | | | | | |
| | | 1 | | | | |
| | | | 1 | | | |
| | | | | 1 | | |
| | | | | | 1 | |
| | | | | | | 1 |

$$= I$$

| | | | |
|---|----|-----|-----|
| 0 | 34 | 123 | 124 |
| 1 | | | |
| | 1 | | |
| | | 1 | |
| | | | 1 |

$$\Lambda^1 \sim$$

| | | | | | | | | | | | |
|------|----|----|---|----|----|----|---|---|-----|-----|-----|
| | 32 | 13 | 0 | 42 | 14 | 34 | 1 | 2 | 123 | 234 | 124 |
| 32 | | | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | |
| 21 | | | | | | | | | | | |
| 0 | | | | | | | | | | | |
| 42 | | | | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | | | |
| 1324 | | | | | | | | | | | |
| 34 | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | |
| 123 | | | | | | | | | | | |
| 134 | | | | | | | | | | | |
| 234 | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | |
| 124 | | | | | | | | | | | |

$$= i$$

| | | | | | | |
|----|---|----|----|---|-----|-----|
| 13 | 0 | 14 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| 1 | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

$$= i$$

| | | | |
|---|----|-----|-----|
| 0 | 34 | 123 | 124 |
| 1 | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

$$\Lambda^2 \sim$$

| | | | | | | | | | | | |
|------|----|----|---|----|----|----|---|---|-----|-----|-----|
| | 32 | 13 | 0 | 42 | 14 | 34 | 1 | 2 | 123 | 234 | 124 |
| 32 | | | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | |
| 21 | | | | | | | | | | | |
| 0 | | | | | | | | | | | |
| 42 | | | | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | | | |
| 1324 | | | | | | | | | | | |
| 34 | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | |
| 123 | | | | | | | | | | | |
| 134 | | | | | | | | | | | |
| 234 | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | |
| 124 | | | | | | | | | | | |

$$= I$$

| | | | | | | |
|----|---|----|----|---|-----|-----|
| 13 | 0 | 14 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| 1 | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

$$= I$$

| | | | |
|---|----|-----|-----|
| 0 | 34 | 123 | 124 |
| 1 | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

$$\Lambda^3 \sim$$

| | | | | | | | | | | | |
|------|----|----|---|----|----|----|---|---|-----|-----|-----|
| | 32 | 13 | 0 | 42 | 14 | 34 | 1 | 2 | 123 | 234 | 124 |
| 32 | | | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | |
| 21 | | | | | | | | | | | |
| 0 | | | | | | | | | | | |
| 42 | | | | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | | | |
| 1324 | | | | | | | | | | | |
| 34 | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | |
| 123 | | | | | | | | | | | |
| 134 | | | | | | | | | | | |
| 234 | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | |
| 124 | | | | | | | | | | | |

$$= a$$

| | | | | | | |
|----|---|----|----|---|-----|-----|
| 13 | 0 | 14 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| 1 | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

$$= a$$

| | | | |
|---|----|-----|-----|
| 0 | 34 | 123 | 124 |
| 1 | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

$$\begin{array}{c}
\Lambda^4 \sim \\
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
& 32 & 13 & 0 & 42 & 14 & 34 & 1 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
& 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
& 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
& 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

$= a$

$$\begin{array}{c}
\Lambda^{13} \sim \\
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
& 32 & 13 & 0 & 42 & 14 & 34 & 1 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
& 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
& 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
& 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

$= b$

$$\begin{array}{c}
\Lambda^{21} \sim \\
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
& 32 & 13 & 0 & 42 & 14 & 34 & 1 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
& 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
& 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
& 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

$= i$

$$\begin{array}{c}
\Lambda^{32} \sim \\
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
& 32 & 13 & 0 & 42 & 14 & 34 & 1 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
& 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
& 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
& 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

$= a$

$$\begin{array}{c}
\Lambda^{234} \sim \\
\begin{array}{c}
32 \quad 13 \quad 0 \quad 42 \quad 14 \quad 34 \quad 1 \quad 2 \quad 123 \quad 234 \quad 124 \\
21 \quad 1 \\
0 \quad 1 \\
42 \quad 1 \\
14 \quad 1 \\
1324 \quad 1 \\
34 \quad 1 \\
1 \quad 1 \\
2 \quad 1 \\
3 \quad 1 \\
123 \quad 1 \\
134 \quad 1 \\
234 \quad 1 \\
4 \quad 1 \\
124 \quad 1
\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\Lambda^{1324} \sim \\
\begin{array}{c}
32 \quad 13 \quad 0 \quad 42 \quad 14 \quad 34 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 123 \quad 234 \quad 124 \\
\begin{array}{|c|c|c|c|}
| | | | |
| --- | --- | --- | --- |
| 32 | | -1 | |
| 13 | | 1 | |
| 21 | | | -1 |
| 0 | | | 1 |
| 42 | -1 | | |
| 14 | 1 | | |
| 1324 | | -1 | |
| 34 | | 1 | |
| 1 | | | 1 |
| 2 | | | -1 |
| 3 | | | |
| 123 | | | 1 |
| 134 | | | -1 |
| 234 | | 1 | |
| 4 | | -1 | |
| 124 | | | 1 |

\end{array}
\end{array}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В: АЛГЕБРА СИНИХ U И D -КВАРКОВ $\mathbb{Q}(U, D)_B$

1. Базисные векторы и их произведения

Укажем базисные векторы алгебры $\mathbb{Q}(u, d)_b$ и правила умножения, которым они подчиняются.

- λ_0 – базисный вектор скалярной части вектора. Для λ_0 имеет место правило умножения

$$\lambda_0 \circ \lambda_0 = \lambda_0 .$$

- Образующие векторы λ_i , где индекс i пробегает значения от 1 до 4, есть базисные векторы пространства-времени СТО. Число векторов λ_i равно четырем. Для них имеют место правила умножения

$$\lambda_i \circ \lambda_0 = \lambda_0 \circ \lambda_i = \lambda_i .$$

$$\lambda_i \circ \lambda_i = \text{sign } \lambda_i ,$$

где

$$\text{sign } \lambda_1 = \text{sign } \lambda_2 = \text{sign } \lambda_3 = -\text{sign } \lambda_4 = \lambda_0 .$$

- Векторы

$$\lambda_{ik} = \lambda_k \circ \lambda_i .$$

Здесь $i \neq k$. Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6 .$$

В соответствии с Разделом I Лекции 12 и Разделом I настоящей Лекции для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей (перестановочные соотношения)

$$\begin{aligned} \lambda_{21} &= -\lambda_{12} , & \lambda_{13} &= \lambda_{31} , & \lambda_{32} &= -\lambda_{23} , \\ \lambda_{14} &= \lambda_{41} , & \lambda_{24} &= -\lambda_{42} , & \lambda_{34} &= \lambda_{43} . \end{aligned}$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и перестановочных соотношений. В частности, имеем

$$\begin{aligned} \lambda_{21} \circ \lambda_{21} &= -\lambda_0 , & \lambda_{42} \circ \lambda_{42} &= \lambda_0 , \\ \lambda_{32} \circ \lambda_{32} &= -\lambda_0 , & \lambda_{14} \circ \lambda_{14} &= -\lambda_0 , \\ \lambda_{13} \circ \lambda_{13} &= \lambda_0 , & \lambda_{34} \circ \lambda_{34} &= -\lambda_0 . \end{aligned}$$

- Векторы

$$\lambda_{ikl} = \lambda_l \circ \lambda_k \circ \lambda_i .$$

Здесь

$$i \neq k, i \neq l, k \neq l .$$

Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4 .$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из перестановочных соотношений

$$\begin{aligned} \lambda_{123} &= -\lambda_{213} = -\lambda_{231} = \lambda_{321} = -\lambda_{312} = -\lambda_{132} , \\ \lambda_{124} &= -\lambda_{214} = -\lambda_{241} = \lambda_{421} = -\lambda_{412} = -\lambda_{142} , \\ \lambda_{134} &= \lambda_{314} = \lambda_{341} = \lambda_{431} = \lambda_{413} = \lambda_{143} , \\ \lambda_{234} &= -\lambda_{324} = \lambda_{342} = \lambda_{432} = -\lambda_{423} = \lambda_{243} . \end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\begin{aligned} \lambda_{123} \circ \lambda_{123} &= \lambda_0 , & \lambda_{124} \circ \lambda_{124} &= -\lambda_0 , \\ \lambda_{134} \circ \lambda_{134} &= -\lambda_0 , & \lambda_{234} \circ \lambda_{234} &= -\lambda_0 . \end{aligned}$$

- Вектор

$$\lambda_{1324} = \lambda_1 \circ \lambda_3 \circ \lambda_2 \circ \lambda_4 .$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из перестановочных соотношений

$$\begin{aligned} \lambda_{1234} &= -\lambda_{2134} = -\lambda_{2314} = \lambda_{3214} = \\ &= -\lambda_{3124} = -\lambda_{1324} = \lambda_{1243} = -\lambda_{2143} = \\ &= -\lambda_{2413} = \lambda_{4213} = -\lambda_{4123} = -\lambda_{1423} = \\ &= \lambda_{1342} = \lambda_{3142} = \lambda_{3412} = \lambda_{4312} = \\ &= \lambda_{4132} = \lambda_{1432} = -\lambda_{2341} = \lambda_{3241} = \\ &= -\lambda_{3421} = -\lambda_{4321} = \lambda_{4231} = -\lambda_{2431} . \end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\lambda_{1324} \circ \lambda_{1324} = \lambda_0 .$$

2. Структурные матрицы алгебры синих кварков

$$\mathbb{Q}(u, d)_b$$

а. Структурные матрицы контравариантной алгебры действия синих кварков $\mathbb{Q}(u, d)_{b_{right}}$

$$\lambda_0 \sim$$

| | | | | |
|------|---|---|---|---|
| 32 | 1 | | | |
| 13 | 1 | | | |
| 21 | | 1 | | |
| 0 | | | 1 | |
| 42 | | | 1 | |
| 14 | | | | 1 |
| 1324 | | | | |
| 34 | | | | 1 |
| 1 | | | 1 | |
| 2 | | | | 1 |
| 3 | | | | |
| 123 | | | | 1 |
| 134 | | | | |
| 234 | | | 1 | |
| 4 | | | | 1 |
| 124 | | | | |

$$= I$$

| | | | | | |
|----|---|----|---|-----|-----|
| 13 | 0 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| 1 | 1 | | | | |
| | 1 | | | | |
| | | 1 | | | |
| | | | 1 | | |
| | | | | 1 | |
| | | | | | 1 |

$$= I$$

| | | | |
|---|----|-----|-----|
| 0 | 34 | 123 | 124 |
| 1 | | | |
| | 1 | | |
| | | 1 | |
| | | | 1 |

$$\lambda_1 \sim$$

| | | | | |
|------|---|---|---|---|
| 32 | | | | 1 |
| 13 | | | | 1 |
| 21 | | | 1 | |
| 0 | | | | |
| 42 | | | | 1 |
| 14 | | | | 1 |
| 1324 | | | | 1 |
| 34 | | | | |
| 1 | | 1 | | |
| 2 | | 1 | | |
| 3 | | 1 | | |
| 123 | 1 | | | |
| 134 | | | 1 | |
| 234 | | | 1 | |
| 4 | | | 1 | |
| 124 | | 1 | | |

$$= a$$

| | | | | | |
|----|---|----|---|-----|-----|
| 13 | 0 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| | | 1 | | | |
| | | 1 | | | |
| | | | 1 | | |
| | | | | 1 | |
| | | | | | 1 |

$$= a$$

| | | | |
|---|----|-----|-----|
| 0 | 34 | 123 | 124 |
| | | A | |
| A | | | |
| | A | | |

$$\lambda_2 \sim$$

| | | | | |
|------|----|----|----|----|
| 32 | | | 1 | |
| 13 | | | -1 | |
| 21 | | | | |
| 0 | | -1 | 1 | |
| 42 | | | | 1 |
| 14 | | | | -1 |
| 1324 | | | | -1 |
| 34 | | | | 1 |
| 1 | -1 | 1 | | |
| 2 | | | | |
| 3 | 1 | | | |
| 123 | -1 | | | |
| 134 | | -1 | 1 | |
| 234 | | | | |
| 4 | | 1 | | |
| 124 | | -1 | | |

$$= b$$

| | | | | | |
|----|---|----|----|-----|-----|
| 13 | 0 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| | | -1 | | | |
| | | 1 | | | |
| | | | -1 | | |
| | | | 1 | | |
| | | | | 1 | |
| | | | | | -1 |

$$= b$$

| | | | |
|---|----|-----|-----|
| 0 | 34 | 123 | 124 |
| | | -I | |
| I | | | |
| | I | | |

$$\lambda_3 \sim$$

| | | | | |
|------|----|----|----|----|
| 32 | | | -1 | |
| 13 | | | 1 | |
| 21 | | | | -1 |
| 0 | | | 1 | |
| 42 | | | | -1 |
| 14 | | | | 1 |
| 1324 | | | | -1 |
| 34 | | | | 1 |
| 1 | 1 | | | |
| 2 | -1 | | | |
| 3 | | 1 | | |
| 123 | -1 | | | |
| 134 | | 1 | | |
| 234 | | -1 | | |
| 4 | | | 1 | |
| 124 | | | -1 | |

$$= i$$

| | | | | | |
|----|---|----|----|-----|-----|
| 13 | 0 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| | | -1 | | | |
| | | -1 | | | |
| | | | -1 | | |
| | | | 1 | | |
| | | | | 1 | |
| | | | | | 1 |

$$= i$$

| | | | |
|---|----|-----|-----|
| 0 | 34 | 123 | 124 |
| | | -1 | |
| 1 | | | |
| | 1 | | |
| | | 1 | |
| | | | 1 |

$$\lambda_{13} \sim$$

$$\begin{array}{c}
\lambda_{32} \sim \\
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
32 & 13 & 0 & 42 \\
13 & 21 & 14 & 1324 \\
21 & 42 & 34 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 3 \\
-1 & 134 & 124 & 4
\end{array} \\
\begin{array}{|c|c|c|c|}
| | | | |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | | | |
| -1 | | | |
| | 1 | | |
| | -1 | | |
| | | 1 | |
| | | -1 | |
| | | | 1 |
| | | | -1 |

\end{array}
\end{array}$$

$$\lambda_{14} \sim$$

| | | | |
|---|----|----|----|
| | | | |
| | 1 | -1 | |
| 1 | | | |
| | -1 | | |
| | | | -1 |
| | | | 1 |
| | | 1 | -1 |
| | | -1 | |

$$= b$$

| | | |
|----|----|----|
| | -1 | |
| -1 | | |
| 1 | | 1 |
| | | -1 |

$$= b$$

| | | |
|---|----|----|
| | -A | |
| A | | A |
| | | -A |

$$\lambda_{34} \sim$$

| | | | |
|---|----|---|----|
| | -1 | | |
| | -1 | | |
| | -1 | | |
| 1 | | | |
| 1 | | | |
| 1 | | | |
| | | | -1 |
| | | | -1 |
| | | | -1 |
| | | 1 | |
| | | 1 | |
| | | 1 | |
| | | 1 | |

$$= 1$$

| | | |
|----|----|----|
| | -1 | |
| -1 | | |
| 1 | | -1 |
| | | 1 |

$$= 1$$

| | | |
|---|----|----|
| | -1 | |
| 1 | | -1 |
| | | 1 |

$$\lambda_{42} \sim$$

| | | | |
|----|----|----|----|
| | | -1 | |
| | -1 | | |
| 1 | | | |
| | 1 | | |
| -1 | | | |
| | | | -1 |
| | | | 1 |
| | | 1 | |
| | | -1 | |

$$= a$$

| | | |
|----|---|----|
| | 1 | |
| 1 | | |
| -1 | | -1 |
| | | 1 |
| | | -1 |

$$= a$$

| | | |
|---|----|----|
| | -I | |
| I | | -I |
| | | I |

$$\lambda_{123} \sim$$

| | | | |
|----|----|----|----|
| | | -1 | |
| | | -1 | |
| | | 1 | |
| | | | -1 |
| | | | -1 |
| | | | 1 |
| -1 | | | |
| -1 | | | |
| 1 | | | |
| | 1 | | |
| | -1 | | |
| | -1 | | |
| | 1 | | |
| | | 1 | |

$$= 1$$

| | | |
|----|----|----|
| | -1 | |
| 1 | | -1 |
| -1 | | 1 |
| | | |

$$= 1$$

| | | |
|---|---|---|
| | B | |
| B | | B |
| B | | |

$$\begin{aligned}
& \lambda_{124} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 32 & 13 & 0 \\ & 21 & 42 & 14 \\ & 1 & 2 & 34 \\ & 3 & 123 & 234 \\ & 4 & 124 & 124 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \\ & & & -1 \end{array} \end{array} \\
& = 1 \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 13 & 0 \\ 14 & 34 \\ 2 & 123 \\ 134 & 124 \end{array} \\ \begin{array}{cc} & 1 \\ & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \end{array} = 1 \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 34 \\ 123 & 124 \end{array} \\ \begin{array}{cc} & -B \\ & B \\ -B & \\ B & \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_{234} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 32 & 13 & 0 \\ & 21 & 42 & 14 \\ & 1 & 2 & 34 \\ & 3 & 123 & 234 \\ & 4 & 124 & 124 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} & & & -1 \\ & & & 1 \\ & & 1 & -1 \\ & & & -1 \end{array} \end{array} \\
& = b \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 13 & 0 \\ 14 & 34 \\ 2 & 123 \\ 134 & 124 \end{array} \\ \begin{array}{cc} & 1 \\ & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array} \end{array} = b \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 34 \\ 123 & 124 \end{array} \\ \begin{array}{cc} & I \\ & -I \\ -I & \\ I & \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_{134} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 32 & 13 & 0 \\ & 21 & 42 & 14 \\ & 1 & 2 & 34 \\ & 3 & 123 & 234 \\ & 4 & 124 & 124 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} & & & -1 \\ & & & -1 \\ & & -1 & \\ & 1 & 1 & \end{array} \end{array} \\
& = a \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 13 & 0 \\ 14 & 34 \\ 2 & 123 \\ 134 & 124 \end{array} \\ \begin{array}{cc} & -1 \\ & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \end{array} = a \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 34 \\ 123 & 124 \end{array} \\ \begin{array}{cc} & -A \\ & A \\ -A & \\ A & \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_{1324} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 32 & 13 & 0 \\ & 21 & 42 & 14 \\ & 1 & 2 & 34 \\ & 3 & 123 & 234 \\ & 4 & 124 & 124 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} & & 1 & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \\ & 1 & 1 & \end{array} \end{array} \\
& = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 13 & 0 \\ 14 & 34 \\ 2 & 123 \\ 134 & 124 \end{array} \\ \begin{array}{cc} & 1 \\ & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 34 \\ 123 & 124 \end{array} \\ \begin{array}{cc} & -B \\ & B \\ B & \\ -B & \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array}
\end{aligned}$$

b. Структурные матрицы ковариантной алгебры пространства-времени синих кварков $\mathbb{Q}(u, d)_{left}$

$$\Lambda^0 \sim$$

| | | | | |
|------|---|---|---|---|
| 32 | 1 | | | |
| 13 | 1 | | | |
| 21 | | 1 | | |
| 0 | | | 1 | |
| 42 | | 1 | | |
| 14 | | | 1 | |
| 1324 | | | | 1 |
| 34 | | | 1 | |
| 1 | | | | 1 |
| 2 | | | 1 | |
| 3 | | | | 1 |
| 123 | | | | 1 |
| 134 | | | 1 | |
| 234 | | | | 1 |
| 4 | | | | |
| 124 | | | | 1 |

$$= I$$

| | | | | | |
|----|---|----|---|-----|-----|
| 13 | 0 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| 1 | 1 | | | | |
| | 1 | | | | |
| | | 1 | | | |
| | | | 1 | | |
| | | | | 1 | |
| | | | | | 1 |

$$= I$$

| | | | |
|---|----|-----|-----|
| 0 | 34 | 123 | 124 |
| 1 | | | |
| | 1 | | |
| | | 1 | |
| | | | 1 |

$$\Lambda^1 \sim$$

| | | | | |
|------|----|----|----|----|
| 32 | | | | -1 |
| 13 | | | | 1 |
| 21 | | | | -1 |
| 0 | | | 1 | |
| 42 | | | | -1 |
| 14 | | | | 1 |
| 1324 | | | | -1 |
| 34 | | | 1 | |
| 1 | | 1 | | |
| 2 | | -1 | | |
| 3 | | 1 | | |
| 123 | -1 | | | |
| 134 | | | 1 | |
| 234 | | | -1 | |
| 4 | | | 1 | |
| 124 | | -1 | | |

$$= i$$

| | | | | | |
|----|---|----|---|-----|-----|
| 13 | 0 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| | | -1 | | | |
| | | -1 | | | |
| | 1 | | | | |
| 1 | | | | | |
| | | | 1 | | |
| | | | | 1 | |

$$= i$$

| | | | |
|---|----|-----|-----|
| 0 | 34 | 123 | 124 |
| | | A | |
| A | | -A | |
| | A | | |

$$\Lambda^2 \sim$$

| | | | | |
|------|----|----|----|----|
| 32 | | | | -1 |
| 13 | | | | -1 |
| 21 | | | 1 | |
| 0 | | | 1 | |
| 42 | | | | -1 |
| 14 | | | | -1 |
| 1324 | | | | 1 |
| 34 | | | | 1 |
| 1 | 1 | | | |
| 2 | | 1 | | |
| 3 | -1 | | | |
| 123 | -1 | | | |
| 134 | | 1 | | |
| 234 | | | 1 | |
| 4 | | -1 | | |
| 124 | | | -1 | |

$$= I$$

| | | | | | |
|----|---|----|----|-----|-----|
| 13 | 0 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| | | -1 | | | |
| | | | -1 | | |
| | 1 | | | | |
| -1 | | | 1 | | |
| | | | | 1 | |
| | | | | | 1 |

$$= I$$

| | | | |
|---|----|-----|-----|
| 0 | 34 | 123 | 124 |
| | | -I | |
| I | | | -I |
| | I | | |

$$\Lambda^3 \sim$$

| | | | | |
|------|---|---|---|---|
| 32 | | | | 1 |
| 13 | | | | 1 |
| 21 | | | | 1 |
| 0 | | | 1 | |
| 42 | | | | 1 |
| 14 | | | | 1 |
| 1324 | | | | 1 |
| 34 | | | | |
| 1 | 1 | | | |
| 2 | 1 | | | |
| 3 | | 1 | | |
| 123 | | 1 | | |
| 134 | | | 1 | |
| 234 | | 1 | | |
| 4 | | | 1 | |
| 124 | | | 1 | |

$$= a$$

| | | | | | |
|----|---|----|---|-----|-----|
| 13 | 0 | 34 | 2 | 123 | 124 |
| | | 1 | | | |
| | | 1 | | | |
| | | | 1 | | |
| 1 | | | | | |
| | 1 | | | | |
| | | | 1 | | |

$$= a$$

| | | | |
|---|----|-----|-----|
| 0 | 34 | 123 | 124 |
| | | 1 | |
| 1 | | | 1 |
| | 1 | | |

$$\begin{array}{c}
\Lambda^{13} \sim \\
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
13 & 21 & 0 & 42 \\
14 & 1324 & 1 & 2 \\
123 & 234 & 124 & 4 \\
32 & 1 & 3 & 134
\end{array} \\
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
\begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} &
\begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ 1 \\ \\ -1 \\ 1 \\ \\ \\ \\ \\ -1 \\ 1 \end{array} &
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ -1 \\ 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ 1 \\ -1 \\ \\ 1 \\ -1 \end{array} \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

$$\Lambda^{32} \sim$$

$$\begin{array}{c}
\Lambda^{34} \sim \\
\begin{array}{cccc}
\begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline -1 & & & \\ \hline -1 & & & \\ \hline -1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & \\ \hline & & -1 & \\ \hline & & -1 & \\ \hline & & -1 & \\ \hline & & -1 & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \end{array} \\
= I \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{array} \\ \hline \end{array} \\
= I \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{array} \\ \hline \end{array}
\end{array}$$

[illegible]

$$\Lambda^{234} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & \begin{array}{cccc} 32 & 21 & 0 & 42 \end{array} & \begin{array}{cccc} 14 & 34 & 1 & 2 \end{array} & \begin{array}{cccc} 123 & 234 & 124 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & -1 \\ \hline & & & -1 \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & -1 & \\ \hline & & -1 & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & \\ \hline & & -1 & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

[illegible]