Лекция 7. Антилептоны и ковариантная сопряженная алгебра действия.

А. А. Кецарис

(4 марта 2004 г.)

В этой лекции мы продолжаем рассматривать операцию сопряжения и вводим ковариантную сопряженную алгебру действия как способ описания антилептонов.

I. КОВАРИАНТНАЯ СОПРЯЖЕННАЯ АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ КАК АЛГЕБРА КЛИФФОРДА

В соответствии с нашей программой также будем рассматривать ковариантную алгебру действия для антилептонов как алгебру Клиффорда. В этом случае ковариантную алгебру действия будем называть ковариантной сопряженной алгеброй Клиффорда и обозначать ${}^{+}\mathbb{C}$. Базисные векторы для ковариантной сопряженной алгебры Клиффорда будем обозначать ε^I.

Зададим закон умножения базисных векторов в ковариантной сопряженной алгебре Клиффорда ${}^{+}\mathbb{C}$ следующим образом:

$$\varepsilon^K \circ \varepsilon^I = {}^{+}C^{IK}{}_{L}\, \varepsilon^L \,, \tag{1}$$

где ${}^{+}C^{IK}{}_{L}$ есть структурные постоянные ковариантной сопряженной алгебры ${}^{+}\mathbb{C}$.

Итак в соответствии с принятой нами программой мы имеем алгебру Клиффорда, построенную на шестнадцати базисных векторах ε^I, где индекс I пробегает значения от 0 до 15. Укажем эти векторы и правила умножения, которым они подчиняются.

- ε_0. Для него имеет место правило умножения

$$\varepsilon^0 \circ \varepsilon^0 = \varepsilon^0 \,.$$

- ε^i, где индекс i пробегает значения от 1 до 4.* То есть, число таких векторов равно четырем. Эти векторы являются образующими. Для них имеют место правила умножения

$$\varepsilon^i \circ \varepsilon^0 = \varepsilon^0 \circ \varepsilon^i = \varepsilon^i \,.$$

$$\varepsilon^i \circ \varepsilon^i = \operatorname{sign} \varepsilon^i \,,$$

где

$$\operatorname{sign} \varepsilon^1 = \operatorname{sign} \varepsilon^2 = \operatorname{sign} \varepsilon^3 = -\operatorname{sign} \varepsilon^4 = \varepsilon^0 \,.$$

- Векторы

$$\varepsilon^{ik} = \varepsilon^k \circ \varepsilon^i \,.$$

Здесь $i \neq k$. Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6 \,.$$

Для этих векторов выполняется правило перестановки индексов и, соответственно, сомножителей – условие антикоммутативности

$$\varepsilon^{ik} = -\varepsilon^{ki} \,.$$

Остальные правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условий ассоциативности и антикоммутативности. В частности,

$$\varepsilon^{ik} \circ \varepsilon^{ik} = -\varepsilon^i \circ \left(\varepsilon^k \circ \varepsilon^k\right) \circ \varepsilon^i = -\operatorname{sign} \varepsilon^i \circ \operatorname{sign} \varepsilon^k \,.$$

- Векторы

$$\varepsilon^{ikl} = \varepsilon^i \circ \varepsilon^k \circ \varepsilon^l \,.$$

Здесь

$$i \neq k \,, i \neq l \,, k \neq l \,.$$

Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4 \,.$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, следующие из условий ассоциативности и антикоммутативности

$$\varepsilon^{ikl} = \varepsilon^{kli} = \varepsilon^{lik} = -\varepsilon^{kil} = -\varepsilon^{ilk} = -\varepsilon^{lki} \,.$$

Остальные правила умножения, в которых участвуют эти векторы, также следуют из и условий ассоциативности и антикоммутативности. В частности,

$$\varepsilon^{ikl} \circ \varepsilon^{ikl} = -\varepsilon^i \circ \left(\varepsilon^k \circ \left(\varepsilon^l \circ \varepsilon^l\right) \circ \varepsilon^k\right) \circ \varepsilon^i = -\operatorname{sign} \varepsilon^i \circ \operatorname{sign} \varepsilon^k \circ \operatorname{sign} \varepsilon^l \,.$$

*Далее все индексы, обозначаемые малыми латинскими буквами, начиная с i, пробегают значения от 1 до 4.

- Вектор
$$\varepsilon^{iklm} = \varepsilon^i \circ \varepsilon^k \circ \varepsilon^l \circ \varepsilon^m \,.$$
Здесь
$$i \neq k\,, i \neq l\,, i \neq m\,, k \neq l\,, k \neq m\,, l \neq m\,.$$
Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по четыре, то есть единице
$$C_4^4 = 1\,.$$
Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, следующие из условий ассоциативности и антикоммутативности
$$\begin{aligned}\varepsilon^{iklm} = \varepsilon^{ilmk} = \varepsilon^{imkl} = -\varepsilon^{ilkm} = \\ -\varepsilon^{ikml} = -\varepsilon^{imlk} = -\varepsilon^{klmi} = -\varepsilon^{kmil} = \\ -\varepsilon^{kilm} = \varepsilon^{kmli} = \varepsilon^{klim} = \varepsilon^{kiml} = \\ \varepsilon^{lmik} = \varepsilon^{likm} = \varepsilon^{lmki} = -\varepsilon^{limk} = \\ -\varepsilon^{lmki} = -\varepsilon^{lkim} = -\varepsilon^{mikl} = -\varepsilon^{mkli} = \\ -\varepsilon^{mlik} = \varepsilon^{mkil} = \varepsilon^{milk} = \varepsilon^{mlki}\,.\end{aligned}$$
Остальные правила умножения, в которых участвует этот вектор, также следуют из условий ассоциативности и коммутативности. В частности,
$$\begin{aligned}\varepsilon^{iklm} \circ \varepsilon^{iklm} = \\ \varepsilon^i \circ (\varepsilon^k \circ (\varepsilon^l \circ (\varepsilon^m \circ \varepsilon^m) \circ \varepsilon^l) \circ \varepsilon^k) \circ \varepsilon^i = \\ \operatorname{sign} \varepsilon^i \circ \operatorname{sign} \varepsilon^k \circ \operatorname{sign} \varepsilon^l \circ \operatorname{sign} \varepsilon^m\,.\end{aligned}$$

В том случае, когда необходимо подчеркнуть размерность образующего пространства алгебры Клиффорда, мы будем использовать обозначение ${}^+\mathbb{C}_4$ вместо обозначения ${}^+\mathbb{C}$. Это особенно полезно при выделении подалгебры алгебры Клиффорда. Например, подалгебру с тремя образующими базисными векторами (например, ε^1, ε^2, ε^3), удобно обозначать ${}^+\mathbb{C}_3$.

В соответствии с нашим общим замыслом мы должны для указанных базисных векторов ε^I, пользуясь правилами умножения векторов в алгебре Клиффорда, найти из (1) структурные матрицы $C^{IK}{}_L$ и показать, что эти матрицы связаны со структурными матрицами $C^L{}_{KI}$ алгебры $\mathbb{C}$ некоторой операцией "сопряжения", которая в комплексном представлении должна сводиться к эрмитовому сопряжению.

II. РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОВАРИАНТНОЙ СОПРЯЖЕННОЙ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА

Рассмотрим соответствие между базисными векторами ковариантной сопряженной алгебры Клиффорда ${}^+\mathbb{C}$ и ее структурными матрицами. Для этого как и прежде воспользуемся ассоциативностью алгебры ${}^+\mathbb{C}$. Запишем условие ассоциативности для произведения трех базисных векторов
$$(\varepsilon^N \circ \varepsilon^K) \circ \varepsilon^I = \varepsilon^N \circ (\varepsilon^K \circ \varepsilon^I)\,.$$
Отсюда, используя закон умножения базисных векторов (1), получим
$${}^+C^{KN}{}_L\,(\varepsilon^L \circ \varepsilon^I) = {}^+C^{IK}{}_L\,(\varepsilon^N \circ \varepsilon^L)\,.$$
Откуда
$${}^+C^{KN}{}_L\;{}^+C^{IL}{}_M = {}^+C^{IK}{}_L\;{}^+C^{LN}{}_M\,. \tag{2}$$
Сравнивая это выражение с самим законом умножения базисных векторов (1), заключаем, что базисным векторам ε^I можно поставить в соответствие структурные матрицы ${}^+C^{IK}{}_L$. При этом $\circ$ – умножению базисных векторов ставится в соответствие обычное умножение матриц в *том же* порядке. Это соответствие составляет *регулярное (присоединенное) представление* алгебры ${}^+\mathbb{C}$ и обозначается:
$$\varepsilon^I \sim {}^+C^{IK}{}_L\,.$$
Номер структурной матрицы I есть индекс базисного вектора, который представлен этой матрицей. В регулярном представлении произвольному вектору алгебры ${}^+S = S_I\,\varepsilon^I$ соответствует матрица
$${}^+S^K{}_L = S_I \cdot {}^+C^{IK}{}_L\,. \tag{3}$$

1. Действительное представление

Из (1) следует алгоритм вычисления структурных матриц, соответствующих базисным векторам. Сначала нужно установить номер структурной матрицы в соответствии с номером базисного вектора. Затем для вычисления элемента структурной матрицы с номером I, расположенного в строке с номером K и в столбце с номером L, необходимо базисный вектор, номер которого совпадает с номером *строки* матрицы, умножить *справа* на базисный вектор, номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор, на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер L указанного базисного вектора определит номер столбца, на пересечении которого с рассматриваемой строкой, необходимо поставить указанное численное значение проекции.

Теперь вычислим структурные матрицы ${}^+C^{IK}{}_L$ по приведенному алгоритму для двух случаев

1. подалгебра ${}^+\mathbb{C}_3$ с тремя образующими базисными векторами ε^1, ε^2, ε^3;

2. алгебра ${}^+\mathbb{C}_4$ с четырьмя образующими базисными векторами ε^1, ε^2, ε^3, ε^4.

Для подалгебры ${}^{+}\mathbb{C}_3$ будем вычислять структурные матрицы для особого порядка индексов:*

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123)\,.$$

То есть, будем записывать слагаемые вектора в следующей последовательности

$$\begin{aligned} {}^{+}\psi &= \psi_{32}\,\varepsilon^{32} + \psi_{13}\,\varepsilon^{13} + \psi_{21}\,\varepsilon^{21} + \psi_0\,\varepsilon^0 \\ &+ \psi_1\,\varepsilon^1 + \psi_2\,\varepsilon^2 + \psi_3\,\varepsilon^3 + \psi_{123}\,\varepsilon^{123}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

В результате получим действительные матрицы 8×8 представления базисных векторов ε^I. (См. Раздел III).

Для алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_4$ будем вычислять структурные матрицы для особого порядка индексов, обобщающего предыдущий порядок индексов,

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124)\,.$$

То есть, будем записывать слагаемые вектора в следующей последовательности

$$\begin{aligned} {}^{+}\psi &= \psi_{32}\varepsilon^{32} + \psi_{13}\varepsilon^{13} + \psi_{21}\varepsilon^{21} + \psi_0\varepsilon^0 \\ &+ \psi_{42}\varepsilon^{42} + \psi_{14}\varepsilon^{14} + \psi_{1324}\varepsilon^{1324} + \psi_{34}\varepsilon^{34} \\ &+ \psi_1\varepsilon^1 + \psi_2\varepsilon^2 + \psi_3\varepsilon^3 + \psi_{123}\varepsilon^{123} \\ &+ \psi_{134}\varepsilon^{134} + \psi_{234}\varepsilon^{234} + \psi_4\varepsilon^4 + \psi_{124}\varepsilon^{124}\,. \end{aligned}$$

В результате получим действительные матрицы 16×16 представления базисных векторов ε^I. (См. Раздел III).

Помимо действительного представления будем использовать *комплексное* и *кватернионное* представления базисных векторов алгебры Клиффорда, удобные в силу своей компактности.

2. Комплексное представление

1. подалгебра ${}^{+}\mathbb{C}_3$.

Остановимся на вопросе о представлении произведения алгебр Клиффорда. Алгебру Клиффорда ${}^{+}\mathbb{C}_n$ можно записать в виде произведения ${}^{+}\mathbb{C}_m \times {}^{+}\mathbb{C}_{(n-m)}$. И затем представить алгебру ${}^{+}\mathbb{C}_n$ как алгебру ${}^{+}\mathbb{C}_m$ над полем гиперчисел ${}^{+}\mathbb{C}_{(n-m)}$. Например вектор ${}^{+}\psi = \psi_I\,\varepsilon^I$ алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_3$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} {}^{+}\psi &= \varepsilon^{13}\circ(\psi_{32}\varepsilon^{21} + \psi_{13}\varepsilon^0) + \varepsilon^0\circ(\psi_{21}\varepsilon^{21} + \psi_0\varepsilon^0) \\ &+ \varepsilon^2\circ(\psi_1\varepsilon^{21} + \psi_2\varepsilon^0) + \varepsilon^{123}\circ(\psi_3\varepsilon^{21} + \psi_{123}\varepsilon^0)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Эта запись соответствует записи алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_3$ в виде произведения ${}^{+}\mathbb{C}_2 \times {}^{+}\mathbb{C}_1$. Базисными векторами алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_2$ являются $\varepsilon^{13}, \varepsilon^0, \varepsilon^2, \varepsilon^{123}$; базисными векторами алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_1$ являются $\varepsilon^{21}, \varepsilon^0$. Пространство ${}^{+}\mathbb{C}_1$ можно рассматривать как пространство комплексных чисел. Для этого базисному вектору ε^{21} алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_1$ поставим в соответствие мнимую единицу i, имея в виду, что $\operatorname{sign}\varepsilon^{21} = -1$, а базисному вектору ε^0 алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_1$ поставим в соответствие действительную единицу. В результате получим вектор алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_3$ в комплексном представлении

$$\begin{aligned} {}^{+}\psi &= \varepsilon^{13}\circ(\psi_{32}\,i + \psi_{13}) + \varepsilon^0\circ(\psi_{21}\,i + \psi_0) \\ &+ \varepsilon^2\circ(\psi_1\,i + \psi_2) + \varepsilon^{123}\circ(\psi_3\,i + \psi_{123}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Комплексное представление дается матрицами 4×4, в которых блоки заменены базисными единицами 1 и i (см.Раздел III).

2. алгебра ${}^{+}\mathbb{C}_4$.

Комплексное представление основано на следующем разложении вектора:

$$\begin{aligned} {}^{+}\psi &= \varepsilon^{13}\circ(\psi_{32}\varepsilon^{21} + \psi_{13}\varepsilon^0) + \varepsilon^0\circ(\psi_{21}\varepsilon^{21} + \psi_0\varepsilon^0) \\ &+ \varepsilon^{14}\circ(\psi_{42}\varepsilon^{21} + \psi_{14}\varepsilon^0) + \varepsilon^{34}\circ(\psi_{1324}\varepsilon^{21} + \psi_{34}\varepsilon^0) \\ &+ \varepsilon^2\circ(\psi_1\varepsilon^{21} + \psi_2\varepsilon^0) + \varepsilon^{123}\circ(\psi_3\varepsilon^{21} + \psi_{123}\varepsilon^0) \\ &+ \varepsilon^{234}\circ(\psi_{134}\varepsilon^{21} + \psi_{234}\varepsilon^0) + \varepsilon^{124}\circ(\psi_4\varepsilon^{21} + \psi_{124}\varepsilon^0)\,. \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_4$ в виде произведения ${}^{+}\mathbb{C}_3 \times {}^{+}\mathbb{C}_1$ (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_3$ являются ε^{13}, ε^0, ε^{14}, ε^{34} ε^2, ε^{123}, ε^{234}, ε^{124}; базисными векторами алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_1$ являются ε^{21}, ε^0. Заменяя базисный вектор ε^{21} мнимой единицей i, а базисный вектор ε^0 действительной единицей, получим вектор алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_4$ в комплексном представлении

$$\begin{aligned} {}^{+}\psi &= \varepsilon^{13}\circ(\psi_{32}\,i + \psi_{13}) + \varepsilon^0\circ(\psi_{21}\,i + \psi_0) \\ &+ \varepsilon^{14}\circ(\psi_{42}\,i + \psi_{14}) + \varepsilon^{34}\circ(\psi_{1324}\,i + \psi_{34}) \\ &+ \varepsilon^2\circ(\psi_1\,i + \psi_2) + \varepsilon^{123}\circ(\psi_3\,i + \psi_{123}) \\ &+ \varepsilon^{234}\circ(\psi_{134}\,i + \psi_{234}) + \varepsilon^{124}\circ(\psi_4\,i + \psi_{124})\,. \end{aligned}$$

Комплексное представление базисных векторов дается структурными матрицами 8×8, в которых соответствующие блоки заменены базисными единицами 1 и i (см. Раздел III).

Сделаем замечание, на котором остановимся в дальнейшем. Назовем вектор ε^{21} *основным*, имея в виду ту роль, которую этот вектор играет в комплексном представлении. Однако, с алгебраической точки зрения направления ε^{13} и ε^{32} эквивалентны направлению ε^{21} и также могут быть приняты за основное. Для того, чтобы отличить эти случаи от предыдущего, будем обозначать мнимую единицу через j, если за основное

*Приведенный порядок индексов оправдан тем, что для него структурные матрицы алгебры Клиффорда представлены матрицами Дирака (см. далее). С математической точки зрения порядок индексов несущественен вследствие аддитивности сложения компонент вектора, но с физической точки зрения указанному порядку индексов нужно придавать определенное значение.

направление принят вектор ε^{13}, и обозначать мнимую единицу через k, если за основное направление принят вектор ε^{32}.

3. Кватернионное представление.

1. подалгебра $^{+}\mathbb{C}_3$.

Кватернионное представление базисных векторов основано на следующем разложении вектора

$$
\begin{aligned}
&{}^{+}\psi = (\psi_{32}\,\varepsilon^{32} + \psi_{13}\,\varepsilon^{13} + \psi_{21}\,\varepsilon^{21} + \psi_0\,\varepsilon^0)\circ\varepsilon^0 \\
&+(\psi_1\,\varepsilon^{32} + \psi_2\,\varepsilon^{13} + \psi_3\,\varepsilon^{21} + \psi_{123}\,\varepsilon^0)\circ\varepsilon^{123}\,.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Эта запись соответствует записи алгебры $^{+}\mathbb{C}_3$ в виде произведения $^{+}\mathbb{C}_1 \times {}^{+}\mathbb{C}_2$. Базисными векторами алгебры $^{+}\mathbb{C}_1$ являются $\varepsilon^0, \varepsilon^{123}$, базисными векторами алгебры $^{+}\mathbb{C}_2$ являются $\varepsilon^{32}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{21}, \varepsilon^0$.

Записи алгебры Клиффорда $^{+}\mathbb{C}_3$ в виде произведения $^{+}\mathbb{C}_1 \times {}^{+}\mathbb{C}_2$ соответствует представление базисных векторов алгебры $^{+}\mathbb{C}_3$ в пространстве подалгебры $^{+}\mathbb{C}_1$ над полем гиперчисел, составляющих алгебру $^{+}\mathbb{C}_2$. Причем базисные гиперчисла, изоморфные базисным векторам $\varepsilon^{32}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{21}, \varepsilon^0$, могут рассматриваться как кватернионы, так как

$$
\operatorname{sign}\varepsilon^{32} = \operatorname{sign}\varepsilon^{13} = \operatorname{sign}\varepsilon^{21} = -1\,.
$$

Для базисных кватернионов используем соответственно следующие обозначения

$$
i\cdot\sigma^1, \quad i\cdot\sigma^2, \quad i\cdot\sigma^3, \quad 1\,.
$$

Заменяя базисные векторы $\varepsilon^{32}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{21}$, ε^0 кватернионами, получим вектор алгебры $^{+}\mathbb{C}_3$ в кватернионном представлении

$$
\begin{aligned}
&{}^{+}\psi = (\psi_{32}\,i\cdot\sigma^1 + \psi_{13}\,i\cdot\sigma^2 + \psi_{21}\,i\cdot\sigma^3 + \psi_0)\circ\varepsilon^0 \\
&+(\psi_1\,i\cdot\sigma^1 + \psi_2\,i\cdot\sigma^2 + \psi_3\,i\cdot\sigma^3 + \psi_{123})\circ\varepsilon^{123}\,.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Кватернионное представление базисных векторов дается структурными матрицами 2×2, в которых соответствующие блоки заменены $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ (см. Раздел III).

2. алгебра $^{+}\mathbb{C}_4$.

Кватернионное представление базисных векторов основано на разложении вектора

$$
\begin{aligned}
{}^{+}\psi = {} & (\psi_{32}\,\varepsilon^{32} + \psi_{13}\,\varepsilon^{13} + \psi_{21}\,\varepsilon^{21} + \psi_0\,\varepsilon^0)\circ\varepsilon^0 \\
& + (\psi_{42}\,\varepsilon^{32} + \psi_{14}\,\varepsilon^{13} + \psi_{1324}\,\varepsilon^{21} + \psi_{34}\,\varepsilon^0)\circ\varepsilon^{34} \\
& + (\psi_1\,\varepsilon^{32} + \psi_2\,\varepsilon^{13} + \psi_3\,\varepsilon^{21} + \psi_{123}\,\varepsilon^0)\circ\varepsilon^{123} \\
& + (\psi_{134}\,\varepsilon^{32} + \psi_{234}\,\varepsilon^{13} + \psi_4\,\varepsilon^{21} + \psi_{124}\,\varepsilon^0)\circ\varepsilon^{124}\,.
\end{aligned}
$$

Это представление соответствует записи алгебры $^{+}\mathbb{C}_4$ в виде произведения $^{+}\mathbb{C}_2 \times {}^{+}\mathbb{C}_2$. Базисными векторами одной алгебры $\mathbb{C}_2$ являются ε^0, ε^{34}, ε^{123}, ε^{124}; базисными векторами другой алгебры $^{+}\mathbb{C}_2$ являются ε^{32}, ε^{13}, ε^{21}, ε^0. Как и прежде, заменяя базисные векторы $\varepsilon^{32}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{21}$ кватернионами, а базисный вектор (ε^0) действительной единицей, получим вектор алгебры $^{+}\mathbb{C}_4$ в кватернионном представлении

$$
\begin{aligned}
{}^{+}\psi = {} & (\psi_{32}\,i\cdot\sigma^1 + \psi_{13}\,i\cdot\sigma^2 + \psi_{21}\,i\cdot\sigma^3 + \psi_0)\circ\varepsilon^0 \\
& + (\psi_{42}\,i\cdot\sigma^1 + \psi_{14}\,i\cdot\sigma^2 + \psi_{1324}\,i\cdot\sigma^3 + \psi_{34})\circ\varepsilon^{34} \\
& + (\psi_1\,i\cdot\sigma^1 + \psi_2\,i\cdot\sigma^2 + \psi_3\,i\cdot\sigma^3 + \psi_{123})\circ\varepsilon^{123} \\
& + (\psi_{134}\,i\cdot\sigma^1 + \psi_{234}\,i\cdot\sigma^2 + \psi_4\,i\cdot\sigma^3 + \psi_{124})\circ\varepsilon^{124}\,.
\end{aligned}
$$

Кватернионное представление базисных векторов дается структурными матрицами 4×4, в которых соответствующие блоки заменены $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ (см. Раздел III).

III. СТРУКТУРНЫЕ МАТРИЦЫ КОВАРИАНТНОЙ СОПРЯЖЕННОЙ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА

Приведем структурные матрицы алгебры Клиффорда, которые реализуют регулярное представление базисных векторов:

$$
\varepsilon^I \sim {}^{+}C^{IK}{}_L\,.
$$

При преобразовании матриц $^{+}C^{IK}{}_L$ от действительного представления к комплексному использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$
\mathit{1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \quad
a = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\,, \quad
b = \begin{array}{|c|c|}\hline \text{-1} & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \quad
i = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline \text{-1} & \\ \hline\end{array}\,.
$$

Алгебра системы чисел $\{\mathit{1}, a, b, i\}$ представлена законами умножения:

$$
\begin{gathered}
a^2 = b^2 = \mathit{1}\,, \qquad i^2 = -\mathit{1}\,, \qquad a\,b = -b\,a = i\,, \\
a\,i = i\,a = -b\,, \qquad b\,i = i\,b = -a\,.
\end{gathered}
$$

При преобразовании матриц $^{+}C^{IK}{}_L$ от комплексного представления к кватернионному использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$
\mathbb{1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \qquad
I = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline \text{-1} & \\ \hline\end{array}\,.
$$

3. Подалгебра $^{+}\mathbb{C}_3$

$$
\varepsilon^0 \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & 1 & & & & & & & \\
13 & & 1 & & & & & & \\
21 & & & 1 & & & & & \\
0 & & & & 1 & & & & \\ \hline
1 & & & & & 1 & & & \\
2 & & & & & & 1 & & \\
3 & & & & & & & 1 & \\
123 & & & & & & & & 1 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
1 & & & & 13 \\
 & 1 & & & 0 \\ \hline
 & & 1 & & 2 \\
 & & & 1 & 123 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \mathit{1}
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
\mathbb{1} & & 0 \\ \hline
 & \mathbb{1} & 123 \\ \hline
\end{array}
$$

$$\varepsilon^{1} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & & & & & -1 \\
13 & & & & & & & -1 & \\
21 & & & & & & 1 & & \\
0 & & & & & 1 & & & \\ \hline
1 & & & & 1 & & & & \\
2 & & & 1 & & & & & \\
3 & & -1 & & & & & & \\
123 & -1 & & & & & & & \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{|cc|cc|}
13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline
 & & & -1 \\
 & & 1 & \\ \hline
 & 1 & & \\
-1 & & & \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & -I & 0 \\ \hline
I & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon^{32} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & -1 & & & & \\
13 & & & -1 & & & & & \\
21 & & 1 & & & & & & \\
0 & 1 & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & -1 \\
2 & & & & & & & -1 & \\
3 & & & & & & 1 & & \\
123 & & & & & 1 & & & \\ \hline
\end{array}
= -a \begin{array}{|cc|cc|}
13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline
 & 1 & & \\
-1 & & & \\ \hline
 & & & 1 \\
 & & -1 & \\ \hline
\end{array}
= -a \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
I & & 0 \\ \hline
 & I & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon^{2} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & & & & 1 & \\
13 & & & & & & & & -1 \\
21 & & & & & -1 & & & \\
0 & & & & & & 1 & & \\ \hline
1 & & & -1 & & & & & \\
2 & & & & 1 & & & & \\
3 & 1 & & & & & & & \\
123 & & -1 & & & & & & \\ \hline
\end{array}
= b \begin{array}{|cc|cc|}
13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline
 & & & -1 \\
 & & 1 & \\ \hline
 & 1 & & \\
-1 & & & \\ \hline
\end{array}
= b \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & -I & 0 \\ \hline
I & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon^{123} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & & 1 & & & \\
13 & & & & & & 1 & & \\
21 & & & & & & & 1 & \\
0 & & & & & & & & 1 \\ \hline
1 & -1 & & & & & & & \\
2 & & -1 & & & & & & \\
3 & & & -1 & & & & & \\
123 & & & & -1 & & & & \\ \hline
\end{array}
= 1 \begin{array}{|cc|cc|}
13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline
 & & 1 & \\
 & & & 1 \\ \hline
-1 & & & \\
 & -1 & & \\ \hline
\end{array}
= 1 \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & \mathbb{1} & 0 \\ \hline
\mathbb{1} & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon^{3} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & & & -1 & & \\
13 & & & & & 1 & & & \\
21 & & & & & & & & -1 \\
0 & & & & & & & 1 & \\ \hline
1 & & 1 & & & & & & \\
2 & -1 & & & & & & & \\
3 & & & & 1 & & & & \\
123 & & & -1 & & & & & \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|cc|cc|}
13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline
 & & -1 & \\
 & & & -1 \\ \hline
1 & & & \\
 & 1 & & \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & -\mathbb{1} & 0 \\ \hline
\mathbb{1} & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

4. Алгебра $^{+}\mathbb{C}_4$

$$\varepsilon^{0} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
13 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
0 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
14 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
34 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
2 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
123 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
234 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
124 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ \hline
\end{array}$$

$$= 1 \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
1 & & & & & & & & 13 \\
 & 1 & & & & & & & 0 \\
 & & 1 & & & & & & 14 \\
 & & & 1 & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & 1 & & & & 2 \\
 & & & & & 1 & & & 123 \\
 & & & & & & 1 & & 234 \\
 & & & & & & & 1 & 124 \\ \hline
\end{array}
= 1 \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
\mathbb{1} & & & & 0 \\
 & \mathbb{1} & & & 34 \\ \hline
 & & \mathbb{1} & & 123 \\
 & & & \mathbb{1} & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon^{21} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
52 & & -1 & & & & & & \\
13 & 1 & & & & & & & \\
21 & & & & -1 & & & & \\
0 & & & 1 & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & -1 & & \\
2 & & & & & 1 & & & \\
3 & & & & & & & & -1 \\
123 & & & & & & & 1 & \\ \hline
\end{array}
= -i \begin{array}{|cc|cc|}
13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline
1 & & & \\
 & 1 & & \\ \hline
 & & 1 & \\
 & & & 1 \\ \hline
\end{array}
= -i \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
\mathbb{1} & & 0 \\ \hline
 & \mathbb{1} & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon^{13} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & 1 & & & & & \\
13 & & & & -1 & & & & \\
21 & -1 & & & & & & & \\
0 & & 1 & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & 1 & \\
2 & & & & & & & & -1 \\
3 & & & & & -1 & & & \\
123 & & & & & & 1 & & \\ \hline
\end{array}
= -b \begin{array}{|cc|cc|}
13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline
 & 1 & & \\
-1 & & & \\ \hline
 & & & 1 \\
 & & -1 & \\ \hline
\end{array}
= -b \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
I & & 0 \\ \hline
 & I & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$
\varepsilon^1 \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\
13 &&&& &&&& &&& -1 &&&&& \\
21 &&&& &&&& && 1 &&&&&& \\
0 &&&& &&&& & 1 &&&&&&& \\ \hline
42 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\
14 &&&& &&&& &&&& &&& -1 & \\
1324 &&&& &&&& &&&& && 1 && \\
34 &&&& &&&& &&&& & 1 &&& \\ \hline
1 &&&& 1 &&&& &&&& &&&& \\
2 &&& 1 &&&&& &&&& &&&& \\
3 && -1 &&&&&& &&&& &&&& \\
123 & -1 &&&&&&& &&&& &&&& \\ \hline
134 &&&& &&&& 1 &&&& &&&& \\
234 &&&& &&& 1 &&&&& &&&& \\
4 &&&& && -1 &&&&&& &&&& \\
124 &&&& & -1 &&&&&&& &&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= a
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 &&&&& -1 && & 13 \\
 &&&& 1 &&& & 0 \\
 &&&&&&& -1 & 14 \\
 &&&&&& 1 & & 34 \\ \hline
 & 1 &&&&&& & 2 \\
-1 &&&&&&& & 123 \\
 &&& 1 &&&& & 234 \\
 && -1 &&&&& & 124 \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 && -I & & 0 \\
 &&& -I & 34 \\ \hline
I &&& & 123 \\
 & I && & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon^3 \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& && -1 &&&&&& \\
13 &&&& &&&& & 1 &&&&&&& \\
21 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\
0 &&&& &&&& &&& 1 &&&&& \\ \hline
42 &&&& &&&& &&&& && 1 && \\
14 &&&& &&&& &&&& & -1 &&& \\
1324 &&&& &&&& &&&& &&&& 1 \\
34 &&&& &&&& &&&& &&& -1 & \\ \hline
1 && 1 &&&&&& &&&& &&&& \\
2 & -1 &&&&&&& &&&& &&&& \\
3 &&&& 1 &&&& &&&& &&&& \\
123 &&& -1 &&&&& &&&& &&&& \\ \hline
134 &&&& && -1 &&&&&& &&&& \\
234 &&&& & 1 &&&&&&& &&&& \\
4 &&&& &&&& -1 &&&& &&&& \\
124 &&&& &&& 1 &&&&& &&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= i
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 &&&& -1 &&& & 13 \\
 &&&&& -1 && & 0 \\
 &&&&&& 1 & & 14 \\
 &&&&&&& 1 & 34 \\ \hline
1 &&&&&&& & 2 \\
 & 1 &&&&&& & 123 \\
 && -1 &&&&& & 234 \\
 &&& -1 &&&& & 124 \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 && -\mathbb{1} & & 0 \\
 &&& \mathbb{1} & 34 \\ \hline
\mathbb{1} &&& & 123 \\
 & -\mathbb{1} && & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon^2 \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& &&& 1 &&&&& \\
13 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\
21 &&&& &&&& & -1 &&&&&&& \\
0 &&&& &&&& && 1 &&&&&& \\ \hline
42 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\
14 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\
1324 &&&& &&&& &&&& & -1 &&& \\
34 &&&& &&&& &&&& && 1 && \\ \hline
1 &&& -1 &&&&& &&&& &&&& \\
2 &&&& 1 &&&& &&&& &&&& \\
3 & 1 &&&&&&& &&&& &&&& \\
123 && -1 &&&&&& &&&& &&&& \\ \hline
134 &&&& &&& -1 &&&&& &&&& \\
234 &&&& &&&& 1 &&&& &&&& \\
4 &&&& & 1 &&&&&&& &&&& \\
124 &&&& && -1 &&&&&& &&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= b
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 &&&&& -1 && & 13 \\
 &&&& 1 &&& & 0 \\
 &&&&&&& -1 & 14 \\
 &&&&&& 1 & & 34 \\ \hline
 & 1 &&&&&& & 2 \\
-1 &&&&&&& & 123 \\
 &&& 1 &&&& & 234 \\
 && -1 &&&&& & 124 \\ \hline
\end{array}
= b
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 && -I & & 0 \\
 &&& -I & 34 \\ \hline
I &&& & 123 \\
 & I && & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon^4 \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& &&&& && -1 && \\
13 &&&& &&&& &&&& & 1 &&& \\
21 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\
0 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\ \hline
42 &&&& &&&& && 1 &&&&&& \\
14 &&&& &&&& & -1 &&&&&&& \\
1324 &&&& &&&& &&&& 1 &&&& \\
34 &&&& &&&& &&& -1 &&&&& \\ \hline
1 &&&& && 1 &&&&&& &&&& \\
2 &&&& & -1 &&&&&&& &&&& \\
3 &&&& &&&& 1 &&&& &&&& \\
123 &&&& &&& -1 &&&&& &&&& \\ \hline
134 && -1 &&&&&& &&&& &&&& \\
234 & 1 &&&&&&& &&&& &&&& \\
4 &&&& -1 &&&& &&&& &&&& \\
124 &&& 1 &&&&& &&&& &&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= -i
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 &&&&&& 1 & & 13 \\
 &&&&&&& 1 & 0 \\
 &&&& -1 &&& & 14 \\
 &&&&& -1 && & 34 \\ \hline
 && -1 &&&&& & 2 \\
 &&& -1 &&&& & 123 \\
1 &&&&&&& & 234 \\
 & 1 &&&&&& & 124 \\ \hline
\end{array}
= -i
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 &&& \mathbb{1} & 0 \\
 && -\mathbb{1} & & 34 \\ \hline
 & -\mathbb{1} && & 123 \\
\mathbb{1} &&& & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$\varepsilon^{21} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
13 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & & & -1 & & & & & & & & & & & & \\
0 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
14 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
34 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
2 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
123 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\
234 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
124 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\ \hline
\end{array}$$

$$= \; -i \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
1 & & & & & & & & 13 \\
 & 1 & & & & & & & 0 \\
 & & 1 & & & & & & 14 \\
 & & & 1 & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & 1 & & & & 2 \\
 & & & & & 1 & & & 123 \\
 & & & & & & 1 & & 234 \\
 & & & & & & & 1 & 124 \\ \hline
\end{array} \; = \; -i \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
\mathbb{1} & & & & 0 \\
 & \mathbb{1} & & & 34 \\ \hline
 & & \mathbb{1} & & 123 \\
 & & & \mathbb{1} & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon^{32} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & -1 & & & & & & & & & & & & \\
13 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
14 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
34 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
2 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
123 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
234 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\
124 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= \; -a \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & 1 & & & & & & & 13 \\
-1 & & & & & & & & 0 \\
 & & & -1 & & & & & 14 \\
 & & 1 & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & 1 & & & 2 \\
 & & & & -1 & & & & 123 \\
 & & & & & & & -1 & 234 \\
 & & & & & & 1 & & 124 \\ \hline
\end{array} \; = \; -a \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
I & & & & 0 \\
 & -I & & & 34 \\ \hline
 & & I & & 123 \\
 & & & -I & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon^{13} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
13 & & & & -1 & & & & & & & & & & & & \\
21 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
14 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
1324 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
34 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
2 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
3 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\
123 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
234 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
4 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
124 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= \; -b \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & 1 & & & & & & & 13 \\
-1 & & & & & & & & 0 \\
 & & & -1 & & & & & 14 \\
 & & 1 & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & 1 & & & 2 \\
 & & & & -1 & & & & 123 \\
 & & & & & & & -1 & 234 \\
 & & & & & & 1 & & 124 \\ \hline
\end{array} \; = \; -b \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
I & & & & 0 \\
 & -I & & & 34 \\ \hline
 & & I & & 123 \\
 & & & -I & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon^{14} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
13 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
21 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
0 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
14 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
1324 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
34 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
2 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
3 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
123 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\
234 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
4 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
124 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= \; b \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & -1 & & & & & 13 \\
 & & 1 & & & & & & 0 \\
 & 1 & & & & & & & 14 \\
-1 & & & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & & & -1 & 2 \\
 & & & & & & 1 & & 123 \\
 & & & & & 1 & & & 234 \\
 & & & & -1 & & & & 124 \\ \hline
\end{array} \; = \; b \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & -I & & & 0 \\
I & & & & 34 \\ \hline
 & & & -I & 123 \\
 & & I & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon^{42} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & -1 \\
13 & & & & & & & -1 \\
21 & & & & & & 1 \\
0 & & & & & 1 \\ \hline
42 & & & & 1 \\
14 & & & 1 \\
1324 & & -1 \\
34 & -1 \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
2 & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
3 & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
123 & & & & & & & & & & & & & 1 \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & 1 \\
234 & & & & & & & & & & & 1 \\
4 & & & & & & & & & & -1 \\
124 & & & & & & & & & -1 \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 & & & & -1 \\
0 & & & 1 \\
14 & & 1 \\
34 & -1 \\ \hline
2 & & & & & & & & -1 \\
123 & & & & & & & 1 \\
234 & & & & & & 1 \\
124 & & & & & -1 \\ \hline
\end{array} = a \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & & -I \\
34 & I \\ \hline
123 & & & & -I \\
124 & & & I \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon^{123} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & & 1 \\
13 & & & & & & & & & & 1 \\
21 & & & & & & & & & & & 1 \\
0 & & & & & & & & & & & & 1 \\ \hline
42 & & & & & & & & & & & & & -1 \\
14 & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
1324 & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
34 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\ \hline
1 & -1 \\
2 & & -1 \\
3 & & & -1 \\
123 & & & & -1 \\ \hline
134 & & & & & 1 \\
234 & & & & & & 1 \\
4 & & & & & & & 1 \\
124 & & & & & & & & 1 \\ \hline
\end{array}$$

$$= -1 \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 & & & & & -1 \\
0 & & & & & & -1 \\
14 & & & & & & & 1 \\
34 & & & & & & & & 1 \\ \hline
2 & 1 \\
123 & & 1 \\
234 & & & -1 \\
124 & & & & -1 \\ \hline
\end{array} = -1 \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & & & -\mathbb{1} \\
34 & & & & \mathbb{1} \\ \hline
123 & \mathbb{1} \\
124 & & -\mathbb{1} \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon^{34} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & 1 \\
13 & & & & & & 1 \\
21 & & & & & & & 1 \\
0 & & & & & & & & 1 \\ \hline
42 & 1 \\
14 & & 1 \\
1324 & & & 1 \\
34 & & & & 1 \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & & 1 \\
2 & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
3 & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
123 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ \hline
134 & & & & & & & & & 1 \\
234 & & & & & & & & & & 1 \\
4 & & & & & & & & & & & 1 \\
124 & & & & & & & & & & & & 1 \\ \hline
\end{array}$$

$$= 1 \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 & & & 1 \\
0 & & & & 1 \\
14 & 1 \\
34 & & 1 \\ \hline
2 & & & & & & & 1 \\
123 & & & & & & & & 1 \\
234 & & & & & 1 \\
124 & & & & & & 1 \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & & \mathbb{1} \\
34 & \mathbb{1} \\ \hline
123 & & & & \mathbb{1} \\
124 & & & \mathbb{1} \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon^{124} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & & & & & & 1 \\
13 & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
21 & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
0 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ \hline
42 & & & & & & & & & -1 \\
14 & & & & & & & & & & -1 \\
1324 & & & & & & & & & & & -1 \\
34 & & & & & & & & & & & & -1 \\ \hline
1 & & & & & -1 \\
2 & & & & & & -1 \\
3 & & & & & & & -1 \\
123 & & & & & & & & -1 \\ \hline
134 & 1 \\
234 & & 1 \\
4 & & & 1 \\
124 & & & & 1 \\ \hline
\end{array}$$

$$= 1 \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 & & & & & & & 1 \\
0 & & & & & & & & 1 \\
14 & & & & & -1 \\
34 & & & & & & -1 \\ \hline
2 & & & -1 \\
123 & & & & -1 \\
234 & 1 \\
124 & & 1 \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & & & & \mathbb{1} \\
34 & & & -\mathbb{1} \\ \hline
123 & & -\mathbb{1} \\
124 & \mathbb{1} \\ \hline
\end{array}$$

$$
\varepsilon^{134} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\
13 &&&& &&&& &&&& &&& -1 & \\
21 &&&& &&&& &&&& && 1 && \\
0 &&&& &&&& &&&& & 1 &&& \\ \hline
42 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\
14 &&&& &&&& &&& -1 & &&&& \\
1324 &&&& &&&& && 1 && &&&& \\
34 &&&& &&&& & 1 &&& &&&& \\ \hline
1 &&&& &&&& 1 &&&& &&&& \\
2 &&&& &&& 1 & &&&& &&&& \\
3 &&&& && -1 && &&&& &&&& \\
123 &&&& & -1 &&& &&&& &&&& \\ \hline
134 &&&& 1 &&&& &&&& &&&& \\
234 &&& 1 & &&&& &&&& &&&& \\
4 && -1 && &&&& &&&& &&&& \\
124 & -1 &&& &&&& &&&& &&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= a
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&& &&&& -1 \\
0 &&&& &&& 1 & \\
14 &&&& && -1 && \\
34 &&&& & 1 &&& \\ \hline
2 &&&& 1 &&&& \\
123 &&& -1 & &&&& \\
234 && 1 && &&&& \\
124 & -1 &&& &&&& \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & & & & -I \\
34 & & & -I & \\ \hline
123 & & I & & \\
124 & I & & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon^{1324} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& && -1 && &&&& &&&& \\
13 &&&& & 1 &&& &&&& &&&& \\
21 &&&& &&&& -1 &&&& &&&& \\
0 &&&& &&& 1 & &&&& &&&& \\ \hline
42 && -1 && &&&& &&&& &&&& \\
14 & 1 &&& &&&& &&&& &&&& \\
1324 &&&& -1 &&&& &&&& &&&& \\
34 &&& 1 & &&&& &&&& &&&& \\ \hline
1 &&&& &&&& &&&& && -1 && \\
2 &&&& &&&& &&&& & 1 &&& \\
3 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\
123 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\ \hline
134 &&&& &&&& && -1 && &&&& \\
234 &&&& &&&& & 1 &&& &&&& \\
4 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\
124 &&&& &&&& &&& 1 & &&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= -i
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&& 1 & &&&& \\
0 &&&& 1 &&&& \\
14 & 1 &&& &&&& \\
34 && 1 && &&&& \\ \hline
2 &&&& &&& 1 & \\
123 &&&& &&&& 1 \\
234 &&&& & 1 &&& \\
124 &&&& && 1 && \\ \hline
\end{array}
= -i
\begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & & \mathbb{1} & & \\
34 & \mathbb{1} & & & \\ \hline
123 & & & & \mathbb{1} \\
124 & & & \mathbb{1} & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon^{234} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\
13 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\
21 &&&& &&&& &&&& & -1 &&& \\
0 &&&& &&&& &&&& && 1 && \\ \hline
42 &&&& &&&& &&& 1 & &&&& \\
14 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\
1324 &&&& &&&& & -1 &&& &&&& \\
34 &&&& &&&& && 1 && &&&& \\ \hline
1 &&&& &&& -1 & &&&& &&&& \\
2 &&&& &&&& 1 &&&& &&&& \\
3 &&&& & 1 &&& &&&& &&&& \\
123 &&&& && -1 && &&&& &&&& \\ \hline
134 &&& -1 & &&&& &&&& &&&& \\
234 &&&& 1 &&&& &&&& &&&& \\
4 & 1 &&& &&&& &&&& &&&& \\
124 && -1 && &&&& &&&& &&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= b
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&& &&&& -1 \\
0 &&&& &&& 1 & \\
14 &&&& && -1 && \\
34 &&&& & 1 &&& \\ \hline
2 &&&& 1 &&&& \\
123 &&& -1 & &&&& \\
234 && 1 && &&&& \\
124 & -1 &&& &&&& \\ \hline
\end{array}
= b
\begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & & & & -I \\
34 & & & -I & \\ \hline
123 & & I & & \\
124 & I & & & \\ \hline
\end{array}
$$

IV. СЖАТОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ.

В этом разделе мы остановимся на представлении базисных векторов алгебры Клиффорда ${}^{+}\mathbb{C}_n$ в ее подалгебре ${}^{+}\mathbb{C}_{n-k}$, где $k < n$. Для примера рассмотрим сжатое представление базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_n$ в ее подалгебре ${}^{+}\mathbb{C}_{n-1}$. Разобьем базисные векторы ε^I алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_n$ на две группы ε^{I_1} и ε^{I_2} с одинаковым числом векторов так, чтобы векторы ε^{I_1} образовывали алгебру ${}^{+}\mathbb{C}_{n-1}$. В силу симметрий алгебры Клиффорда соотношения (1) принимают вид

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{I_1} \circ \varepsilon^{K_1} &= C^{I_1 K_1}{}_{L_1} \cdot \varepsilon^{L_1}\,, && (9)\\
\varepsilon^{I_2} \circ \varepsilon^{K_1} &= C^{I_2 K_1}{}_{L_2} \cdot \varepsilon^{L_2}\,, && (10)\\
\varepsilon^{I_1} \circ \varepsilon^{K_2} &= C^{I_1 K_2}{}_{L_2} \cdot \varepsilon^{L_2}\,, &&\\
\varepsilon^{I_2} \circ \varepsilon^{K_2} &= C^{I_2 K_2}{}_{L_1} \cdot \varepsilon^{L_1}\,. &&
\end{aligned}
$$

Будем полагать, что приближенно при вычислении матриц представления базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_n$ в алгебре ${}^{+}\mathbb{C}_{n-1}$ базисные векторы ε^{L_2} в правой части уравнения (10) можно заменить на базисные векторы ε^{L_1} с помощью соотношения

$$
\varepsilon^{L_2} = P^{L_2}{}_{L_1} \cdot \varepsilon^{L_1}\,, \qquad (11)
$$

где $P^{L_2}{}_{L_1}$ есть матрица соответствий. Тогда соотношение (10) принимает вид:

$$
\varepsilon^{I_2} \circ \varepsilon^{K_1} = C^{I_2 K_1}{}_{L_2} \cdot P^{L_2}{}_{L_1} \cdot \varepsilon^{L_1}\,. \qquad (12)
$$

Соотношения (9) и (12) позволяют получить матрицы представления базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_n$ в ее подалгебре ${}^{+}\mathbb{C}_{n-1}$, причем базисные векторы подалгебры ${}^{+}\mathbb{C}_{n-1}$ представляются точно, а остальные базисные векторы – приближенно.

Аналогичным образом можно рассмотреть сжатое представление базисных векторов алгебры $^+\mathbb{C}_n$ в ее подалгебре $^+\mathbb{C}_{n-k}$, где $k < n$.

1. Первое сжатое представление.

Рассмотрим первое сжатое представление

$$R_1 : {}^+\mathbb{C}_4 \to {}^+\mathbb{C}_3 \, \{\varepsilon^{32}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{21}, \varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^{123}\}.$$

Для этого положим, что при вычислении структурных матриц по формуле (12) соотношение (11) определяется тем, что базисные векторы с индексами

$$42, 14, 1324, 34, 134, 234, 4, 124$$

заменяются на базисные векторы с индексами

$$32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123$$

соответственно. Тогда размерность матриц базисных векторов алгебры $^+\mathbb{C}_4$ понижается вдвое и равна 8×8 в действительном представлении, 4×4 в комплексном представлении и 2×2 в кватернионном представлении. В результате будем иметь

$$\varepsilon^0 \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & 1 & & & & & & & \\ 13 & & 1 & & & & & & \\ 21 & & & 1 & & & & & \\ 0 & & & & 1 & & & & \\ \hline 1 & & & & & 1 & & & \\ 2 & & & & & & 1 & & \\ 3 & & & & & & & 1 & \\ 123 & & & & & & & & 1 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|} \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbb{1} & \\ \hline & \mathbb{1} \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon^1 \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & & & & & & -1 \\ 13 & & & & & & & -1 & \\ 21 & & & & & & 1 & & \\ 0 & & & & & 1 & & & \\ \hline 1 & & & & 1 & & & & \\ 2 & & & 1 & & & & & \\ 3 & & -1 & & & & & & \\ 123 & -1 & & & & & & & \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & & -1 \\ & & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ -1 & & & \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|c|c|} \hline & -I \\ \hline I & \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon^2 \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & & & & & 1 & \\ 13 & & & & & & & & -1 \\ 21 & & & & & -1 & & & \\ 0 & & & & & & 1 & & \\ \hline 1 & & & -1 & & & & & \\ 2 & & & & 1 & & & & \\ 3 & 1 & & & & & & & \\ 123 & & -1 & & & & & & \\ \hline \end{array} = b \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & & -i \\ & & i & \\ \hline & i & & \\ -i & & & \\ \hline \end{array} = b \begin{array}{|c|c|} \hline & -I \\ \hline I & \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon^3 \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & & & & -1 & & \\ 13 & & & & & 1 & & & \\ 21 & & & & & & & & -1 \\ 0 & & & & & & & 1 & \\ \hline 1 & & 1 & & & & & & \\ 2 & -1 & & & & & & & \\ 3 & & & & 1 & & & & \\ 123 & & & -1 & & & & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & -1 & \\ & & & -1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline & -I \\ \hline I & \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon^4 \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & & & & -1 & & \\ 13 & & & & & 1 & & & \\ 21 & & & & & & & & -1 \\ 0 & & & & & & & 1 & \\ \hline 1 & & 1 & & & & & & \\ 2 & -1 & & & & & & & \\ 3 & & & & 1 & & & & \\ 123 & & & -1 & & & & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & -1 & \\ & & & -1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline & -\mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon^{21} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & -1 & & & & & & \\ 13 & 1 & & & & & & & \\ 21 & & & & -1 & & & & \\ 0 & & & 1 & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & -1 & & \\ 2 & & & & & 1 & & & \\ 3 & & & & & & & & -1 \\ 123 & & & & & & & 1 & \\ \hline \end{array} = -i \begin{array}{|cc|cc|} \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline \end{array} = -i \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbb{1} & \\ \hline & \mathbb{1} \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon^{13} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & 1 & & & & & \\ 13 & & & & -1 & & & & \\ 21 & -1 & & & & & & & \\ 0 & & 1 & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & 1 & \\ 2 & & & & & & & & -1 \\ 3 & & & & & -1 & & & \\ 123 & & & & & & 1 & & \\ \hline \end{array} = -b \begin{array}{|cc|cc|} \hline & i & & \\ -i & & & \\ \hline & & & i \\ & & -i & \\ \hline \end{array} = -b \begin{array}{|c|c|} \hline I & \\ \hline & I \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon^{32} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & & -1 & & & & \\ 13 & & & -1 & & & & & \\ 21 & & 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & & -1 \\ 2 & & & & & & & -1 & \\ 3 & & & & & & 1 & & \\ 123 & & & & & 1 & & & \\ \hline \end{array} = -a \begin{array}{|cc|cc|} \hline & 1 & & \\ -1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & -1 & \\ \hline \end{array} = -a \begin{array}{|c|c|} \hline I & \\ \hline & I \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon^{14} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & 1 & & & & & \\ 13 & & & & -1 & & & & \\ 21 & -1 & & & & & & & \\ 0 & & 1 & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & 1 & \\ 2 & & & & & & & & -1 \\ 3 & & & & & -1 & & & \\ 123 & & & & & & 1 & & \\ \hline \end{array} = -b \begin{array}{|cc|cc|} \hline & 1 & & \\ -1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & -1 & \\ \hline \end{array} = -b \begin{array}{|c|c|} \hline I & \\ \hline & I \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon^{42} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & & -1 & & & & \\ 13 & & & -1 & & & & & \\ 21 & & 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & & -1 \\ 2 & & & & & & & -1 & \\ 3 & & & & & & 1 & & \\ 123 & & & & & 1 & & & \\ \hline \end{array} = -a \begin{array}{|cc|cc|} \hline & i & & \\ -i & & & \\ \hline & & & i \\ & & -i & \\ \hline \end{array} = -a \begin{array}{|c|c|} \hline I & \\ \hline & I \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon^{34} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & 1 & & & & & & & \\ 13 & & 1 & & & & & & \\ 21 & & & 1 & & & & & \\ 0 & & & & 1 & & & & \\ \hline 1 & & & & & 1 & & & \\ 2 & & & & & & 1 & & \\ 3 & & & & & & & 1 & \\ 123 & & & & & & & & 1 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|} \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbb{1} & \\ \hline & \mathbb{1} \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon^{123} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & & & 1 & & & \\ 13 & & & & & & 1 & & \\ 21 & & & & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & & & 1 \\ \hline 1 & -1 & & & & & & & \\ 2 & & -1 & & & & & & \\ 3 & & & -1 & & & & & \\ 123 & & & & -1 & & & & \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline -1 & & & \\ & -1 & & \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|} \hline & \mathbb{1} \\ \hline -\mathbb{1} & \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon^{124} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & & & 1 & & & \\ 13 & & & & & & 1 & & \\ 21 & & & & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & & & 1 \\ \hline 1 & -1 & & & & & & & \\ 2 & & -1 & & & & & & \\ 3 & & & -1 & & & & & \\ 123 & & & & -1 & & & & \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline -1 & & & \\ & -1 & & \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|} \hline & \mathbb{1} \\ \hline -\mathbb{1} & \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon^{134} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & & & & & & -1 \\ 13 & & & & & & & -1 & \\ 21 & & & & & & 1 & & \\ 0 & & & & & 1 & & & \\ \hline 1 & & & & 1 & & & & \\ 2 & & & 1 & & & & & \\ 3 & & -1 & & & & & & \\ 123 & -1 & & & & & & & \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & & -i \\ & & i & \\ \hline & i & & \\ -i & & & \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|c|c|} \hline & -I \\ \hline I & \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon^{234} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & & & & & 1 & \\ 13 & & & & & & & & -1 \\ 21 & & & & & -1 & & & \\ 0 & & & & & & 1 & & \\ \hline 1 & & & -1 & & & & & \\ 2 & & & & 1 & & & & \\ 3 & 1 & & & & & & & \\ 123 & & -1 & & & & & & \\ \hline \end{array} = b \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & & -1 \\ & & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ -1 & & & \\ \hline \end{array} = b \begin{array}{|c|c|} \hline & -I \\ \hline I & \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon^{1324} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & -1 & & & & & & \\ 13 & 1 & & & & & & & \\ 21 & & & & -1 & & & & \\ 0 & & & 1 & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & -1 & & \\ 2 & & & & & 1 & & & \\ 3 & & & & & & & & -1 \\ 123 & & & & & & & 1 & \\ \hline \end{array} = -i \begin{array}{|cc|cc|} \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline \end{array} = -i \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbb{1} & \\ \hline & \mathbb{1} \\ \hline \end{array}$$

2. Второе сжатое представление.

Рассмотрим второе сжатое представление

$$R_2 : {}^{+}\mathbb{C}_4 \to {}^{+}\mathbb{C}_2 \, \{\varepsilon^{32}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{21}, \varepsilon^{0}\}.$$

Для этого положим, что при вычислении структурных матриц по формуле (12) соотношение (11) определяется тем, что базисные векторы с индексами $(42, 14, 1324, 34)$, $(134, 234, 4, 124)$ и $(1, 2, 3, 123)$ заменяются на базисные векторы с индексами $(32, 13, 21, 0)$ соответственно. Тогда размерность матриц представления базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_4$ понижается вдвое в сравнении с первым сжатым представлением и равна 4×4 в действительном представлении, 2×2 в комплексном представлении и 1×1 в кватернионном представлении.

Ограничимся тем, что приведем матрицы регулярного представления образующих базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_4$ в алгебре ${}^{+}\mathbb{C}_2$. Имеем

$$\varepsilon^{1} \sim \begin{array}{c|cc|cc|} & 1 & 2 & 3 & 123 \\ & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline 32 & & & & -1 \\ 13 & & & -1 & \\ \hline 21 & & 1 & & \\ 0 & 1 & & & \\ \hline \end{array} = -a \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array} = -a\, I$$

$$\varepsilon^{2} \sim \begin{array}{c|cc|cc|} & 1 & 2 & 3 & 123 \\ & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline 32 & & & 1 & \\ 13 & & & & -1 \\ \hline 21 & -1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \hline \end{array} = -b \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array} = -b\, I$$

$$\varepsilon^{3} \sim \begin{array}{c|cc|cc|} & 1 & 2 & 3 & 123 \\ & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline 32 & & -1 & & \\ 13 & 1 & & & \\ \hline 21 & & & & -1 \\ 0 & & & 1 & \\ \hline \end{array} = -i \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = -i\, \mathbb{1}$$

$$\varepsilon^{4} \sim \begin{array}{c|cc|cc|} & 134 & 234 & 4 & 124 \\ & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline 32 & & -1 & & \\ 13 & 1 & & & \\ \hline 21 & & & & -1 \\ 0 & & & 1 & \\ \hline \end{array} = -i \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = -i\, \mathbb{1}$$

В результате для базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_4$ получим

$$
\begin{array}{ll}
\varepsilon^{32} \sim -a\,I\,, & \varepsilon^{42} \sim -a\,I\,,\\
\varepsilon^{13} \sim -b\,I\,, & \varepsilon^{14} \sim -b\,I\,,\\
\varepsilon^{21} \sim -i\,\mathbb{1}\,, & \varepsilon^{1324} \sim -i\,\mathbb{1}\,,\\
\varepsilon^{0} \sim 1\,\mathbb{1}\,, & \varepsilon^{34} \sim 1\,\mathbb{1}\,,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\varepsilon^{1} \sim -a\,I\,, & \varepsilon^{134} \sim -a\,I\,,\\
\varepsilon^{2} \sim -b\,I\,, & \varepsilon^{234} \sim -b\,I\,,\\
\varepsilon^{3} \sim -i\,\mathbb{1}\,, & \varepsilon^{4} \sim -i\,\mathbb{1}\,,\\
\varepsilon^{123} \sim 1\,\mathbb{1}\,, & \varepsilon^{124} \sim 1\,\mathbb{1}\,.
\end{array}
$$

В рассматриваемом представлении только базисные векторы ε^{32}, ε^{13}, ε^{21}, ε^{0} представлены точно. Соотношения

$$
\begin{array}{c}
\varepsilon^{32} \sim -a\,I\,,\\
\varepsilon^{13} \sim -b\,I\,,\\
\varepsilon^{21} \sim -i\,\mathbb{1}\,,\\
\varepsilon^{0} \sim 1\,\mathbb{1}
\end{array}
$$

можно рассматривать как соответствие между указанными базисными векторами и кватернионами. Именно такое соответствие было постулировано в разделе VC.

3. Третье сжатое представление.

Рассмотрим третье сжатое представление

$$
R_3 :\ {}^{+}\mathbb{C}_4 \to {}^{+}\mathbb{C}_1\,\{\varepsilon^{21}, \varepsilon^{0}\}
$$

Для этого положим, что соотношение (11) определяется тем, что базисные векторы с индексами $(42, 14)$, $(1324, 34)$, $(134, 234)$, $(4, 124)$, $(1, 2)$, $(3, 123)$, $(32, 13)$ заменяются на векторы с индексами $(21, 0)$ соответственно. Тогда размерность матриц базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_4$ понижается вдвое в сравнении с вторым сжатым представлением и равна 2×2 в действительном представлении, 1×1 в комплексном представлении. В результате для базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_4$ получим

$$
\begin{array}{llll}
\varepsilon^{32} \sim a\,, & \varepsilon^{1} \sim a\,, & \varepsilon^{42} \sim a\,, & \varepsilon^{134} \sim a\,,\\
\varepsilon^{13} \sim b\,, & \varepsilon^{2} \sim b\,, & \varepsilon^{14} \sim b\,, & \varepsilon^{234} \sim b\,,\\
\varepsilon^{21} \sim -i\,, & \varepsilon^{3} \sim -i\,, & \varepsilon^{1324} \sim -i\,, & \varepsilon^{4} \sim -i\,,\\
\varepsilon^{0} \sim 1\,, & \varepsilon^{123} \sim 1\,, & \varepsilon^{34} \sim 1\,, & \varepsilon^{124} \sim 1
\end{array}
$$

В рассматриваемом представлении вектор ε^{21} и только он представляется точно.

V. АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ ЛЕПТОНОВ. ОБОБЩАЮЩАЯ ТОЧКА ЗРЕНИЯ.

Пытаясь найти алгебраическую основу для квантовых явлений и отталкиваясь от уравнения Дирака, мы пришли к необходимости ввести целый букет алгебр Клиффорда – алгебр действия лептонов и антилептонов. Количество этих алгебр – четыре. Каждая из них построена на четырех образующих базисных векторах, три из которых имеют сигнатуру равную $(+1)$ и один базисный вектор имеет сигнатуру равную (-1). Общее число базисных векторов каждой из алгебр равно 16.

Укажем еще раз установленные алгебры.

- Контравариантная алгебра $\mathbb{C}$. Ее базисные векторы обозначены ε_I. Закон умножения базисных векторов в этой алгебре записан так
$$
\varepsilon_K \circ \varepsilon_I = \varepsilon_L \cdot C^{L}{}_{KI}\,. \tag{13}
$$
- Ковариантная сопряженная алгебра ${}^{+}\mathbb{C}$. Ее базисные векторы обозначены ε^I. Закон умножения базисных векторов в этой алгебре записан так
$$
\varepsilon^K \circ \varepsilon^I = {}^{+}C^{IK}{}_{L}\,\varepsilon^L\,. \tag{14}
$$
- Контравариантная сопряженная алгебра ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}$. Ее базисные векторы обозначены $\mathcal{E}_I$. Закон умножения базисных векторов в этой алгебре записан так
$$
\mathcal{E}_I \circ \mathcal{E}_K = \mathcal{E}_L \cdot {}^{+}C^{L}{}_{KI}\,. \tag{15}
$$
- Ковариантная алгебра $\widetilde{\mathbb{C}}$. Ее базисные векторы обозначены $\mathcal{E}^I$. Закон умножения базисных векторов в этой алгебре записан так
$$
\mathcal{E}^I \circ \mathcal{E}^K = C^{IK}{}_{L}\,\mathcal{E}^L\,. \tag{16}
$$

В формировании уравнения Дирака для лептонов принимают участие структурные матрицы алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}$ и векторы алгебры $\mathbb{C}$. В формировании уравнения Дирака для антилептонов принимают участие структурные матрицы алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}$ и векторы алгебры ${}^{+}\mathbb{C}$.

Рассматривая законы умножения (13) и (15), мы замечаем, что алгебры $\mathbb{C}$ и ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}$ можно рассматривать как две разновидности одной и той же алгебры, отличающиеся между собой порядком умножения базисных векторов. Умножение в первом случае (по формуле (13)) назовем *правым*, так как базисный вектор с номером структурной матрицы занимает правое место в произведении. В законе умножения (15) базисный вектор с номером структурной матрицы занимает левое место в произведении. Это умножение мы назовем *левым*.

Исходя из приведенных соображений, мы введем соответствующие переобозначения. Будем рассматривать алгебру действия лептонов как алгебру Клиффорда, в которой порядок умножения базисных векторов может быть выбран произвольно. Эту алгебру обозначим $\mathbb{L}$. Одну разновидность этой алгебры, в которой использовано левое умножение базисных векторов, обозначим $\mathbb{L}_{left}$. Таким образом,

$$\mathbb{L}_{left} \equiv^{+} \widetilde{\mathbb{C}}\,.$$

Другую разновидность этой алгебры, в которой использовано правое умножение базисных векторов, обозначим $\mathbb{L}_{right}$. Таким образом,

$$\mathbb{L}_{right} \equiv \mathbb{C}\,.$$

Эту точку зрения мы проиллюстрируем следующей диаграммой

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{L} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathbb{L}_{left} \equiv^{+} \widetilde{\mathbb{C}} & & \mathbb{L}_{right} \equiv \mathbb{C} \end{array}$$

Каждая из этих алгебр характеризуется своими базисными векторами, правилами умножения базисных векторов и структурными матрицами

$$\begin{array}{cc} \mathbb{L}_{left} & \mathbb{L}_{right} \\ \mathcal{E}_I & \varepsilon_I \\ {}^{+}C^{L}{}_{KI} & C^{L}{}_{KI} \end{array}$$

Также будем рассматривать алгебру действия антилептонов как алгебру Клиффорда, в которой порядок умножения базисных векторов может быть выбран произвольно. Эту алгебру обозначим ${}^{+}\mathbb{L}$. Одну разновидность этой алгебры, в которой использовано левое умножение базисных векторов, обозначим ${}^{+}\mathbb{L}_{left}$. Таким образом,

$${}^{+}\mathbb{L}_{left} \equiv \widetilde{\mathbb{C}}\,.$$

Другую разновидность этой алгебры, в которой использовано правое умножение базисных векторов, обозначим ${}^{+}\mathbb{L}_{right}$. Таким образом,

$${}^{+}\mathbb{L}_{right} \equiv {}^{+}\mathbb{C}\,.$$

Эту точку зрения мы проиллюстрируем следующей диаграммой

$$\begin{array}{ccc} & {}^{+}\mathbb{L} & \\ \swarrow & & \searrow \\ {}^{+}\mathbb{L}_{left} \equiv \widetilde{\mathbb{C}} & & {}^{+}\mathbb{L}_{right} \equiv {}^{+}\mathbb{C} \end{array}$$

Каждая из этих алгебр также характеризуется своими базисными векторами, правилами умножения базисных векторов и структурными матрицами

$$\begin{array}{cc} {}^{+}\mathbb{L}_{left} & {}^{+}\mathbb{L}_{right} \\ \mathcal{E}^I & \varepsilon^I \\ C^{IK}{}_{L} & {}^{+}C^{IK}{}_{L} \end{array}$$

Алгебра $\mathbb{L}$ является контравариантной, алгебра ${}^{+}\mathbb{L}$ является ковариантной и вместе с тем сопряженной к алгебре $\mathbb{L}$. Таким образом, понятия ковариантная алгебра и алгебра, сопряженная к контравариантной, являются эквивалентными.[*] В дальнейшем мы будем использовать выдвинутую здесь точку зрения и указанные обозначения.

Структурные матрицы ${}^{+}C^{L}{}_{KI}$, $C^{L}{}_{KI}$, $C^{IK}{}_{L}$, ${}^{+}C^{IK}{}_{L}$ приведенных алгебр Клиффорда вычисляются на основании правил умножения базисных векторов в этих алгебрах для примененного ранее порядка индексов:

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124)\,.$$

Они также могут быть получены путем преобразований одного вида матриц в другой с помощью тензора преобразований, введенного в Разделе II Лекции 3. В качестве такого тензора преобразований выступает либо метрический тензор

$$g^{LP} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
13 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
0 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
14 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
34 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
2 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
123 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
234 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
124 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ \hline
\end{array}$$

либо символ Кронеккера δ^{IK}. Указанные преобразования рассматриваются в Разделе VII следующей Лекции.

VI. ВЫВОДЫ.

1. Структурные матрицы ковариантной сопряженной алгебры Клиффорда ${}^{+}\mathbb{C}$ в комплексном представлении являются эрмитово сопряженными матрицами алгебры действия.

2. Ковариантную сопряженную алгебру Клиффорда ${}^{+}\mathbb{C}_4$ следует считать алгеброй действия антилептонов.

3. Переход от одной из четырех ранее введенных алгебр Клиффорда $\mathbb{C}$, $\widetilde{\mathbb{C}}$, ${}^{+}\mathbb{C}$, ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}$ к другой осуществляется с помощью метрического тензора и символа Кронеккера.

[*]Это заключение особенно интересно в свете поиска единства квантовой теории и общей теории относительности.

4. Четыре алгебры Клиффорда объединены в две взаимно сопряженные алгебры. Одна из них $\mathbb{L} \sim \{\mathbb{C},\, {}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}\}$ отнесена к лептону, а другая ${}^{+}\mathbb{L} \sim \{{}^{+}\mathbb{C},\, \widetilde{\mathbb{C}}\}$ отнесена к антилептону.