Лекция 5. Волновые функции лептонов.

А. А. Кецарис
(31 июля 2003 г.)

В этой лекции мы показываем, что векторы алгебры Клиффорда позволяют описать лептоны трех поколений.

I. ВВЕДЕНИЕ. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА.

Отправной точкой для дальнейших рассуждений будет уравнение Дирака. Стремление соединить это уравнение с изложенным нами алгебраическим подходом к квантовым явлениям заставляет нас поставить в соответствие волновым функциям фундаментальных частиц векторы определенного вида.

Фундаментальные частицы – это такие элементарные частицы, внутренняя структура которых в настоящее время для нас недоступна как в экспериментальном, так и в теоретическом отношении. Выделение частиц по указанному признаку скорее всего не является случайным. А за этим признаком, надо полагать, стоит некая общность фундаментальных частиц. Одной из фундаментальных частиц является электрон.

Итак, начнем с того, что приведем уравнение Дирака, предназначенное прежде всего для описания поведения электрона:

$$\left(\gamma^{i\alpha}{}_{\beta}\,\partial_i + \frac{m_e\,c}{\hbar}\,\gamma^{0\alpha}{}_{\beta}\right)\cdot\psi^{\beta} = 0\,. \tag{1}$$

Здесь величина m_e есть масса электрона*, γ^0 – единичная матрица

$$\gamma^0 = \begin{array}{|cc|cc|}\hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline\end{array}\ ,$$

γ^k – четыре образующих матрицы алгебры Дирака†

$$\gamma^1 = i\,\begin{array}{|cc|cc|}\hline & & & -1 \\ & & -1 & \\ \hline & 1 & & \\ 1 & & & \\ \hline\end{array}\ , \qquad \gamma^2 = i\,\begin{array}{|cc|cc|}\hline & & & i \\ & & -i & \\ \hline & -i & & \\ i & & & \\ \hline\end{array}$$

$$\gamma^3 = i\,\begin{array}{|cc|cc|}\hline & & 1 & \\ & & & -1 \\ \hline -1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline\end{array}\ , \qquad \gamma^4 = -i\,\begin{array}{|cc|cc|}\hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline\end{array}\ .$$

Волновая функция представлена столбцом из четырех комплексных компонент

$$\psi^{\beta} \sim \psi = \begin{vmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{vmatrix}\ , \tag{2}$$

где

$$\begin{array}{ll} \psi^1 = \varphi^1 + i\,\chi^1\,, & \psi^2 = \varphi^2 + i\,\chi^2\,, \\ \psi^3 = \varphi^3 + i\,\chi^3\,, & \psi^4 = \varphi^4 + i\,\chi^4\,, \end{array} \tag{3}$$

Операторы ∂_i есть операторы частного дифференцирования по геометрическим координатам x^1, x^2, x^3 и времени $x^4 = c\,t$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \sim \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\,, \frac{\partial}{\partial x^2}\,, \frac{\partial}{\partial x^3}\,, \frac{\partial}{\partial x^4} = \frac{\partial}{c\,\partial t}\right)\,.$$

Приведенные уравнения представляют собой уравнения Дирака в комплексной форме. Индексы α, β принимают значения 1, 2, 3, 4 в соответствии с нумерацией компонент волновой функции. Однако нужно иметь в виду, что используемая здесь нумерация не имеет отношения к той нумерации компонент, которая была введена в алгебре действия.

Кроме комплексной формы уравнение Дирака может быть записано в *спинорной* форме. Для этого необходимо столбец ψ из четырех компонент заменить на столбец из двух компонент

$$\psi = \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix}\ ,$$

Каждая из компонент ξ и η является двухкомпонентной функцией

$$\xi = \begin{vmatrix} \varphi^1 + i\,\chi^1 \\ \varphi^2 + i\,\chi^2 \end{vmatrix}\ ,$$

$$\eta = \begin{vmatrix} \varphi^3 + i\,\chi^3 \\ \varphi^4 + i\,\chi^4 \end{vmatrix}\ ,$$

Каждая из величин ξ и η определяется как *спинор*‡. При этом волновая функция выступает как *биспинор*.

---

*Как и прежде c – скорость света, $\hbar$ – постоянная Планка.

†Мы не назначаем знаки перед матрицами γ, как это делается обычно, а принимаем их теми, которые получены при вычислениях в Лекции 3.

‡Подробнее о спинорах смотри В. Б. Берестецкий, Е. М. Лившиц, Л. П. Питаевский, Релятивистская квантовая теория, Часть 1, М., Наука, 1968

Спинорной форме уравнения Дирака соответствуют матрицы Дирака размерности 2×2, в которых использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{bmatrix} & -i \\ i & \end{bmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

После обозначения указанных блоков получим матрицы Дирака в следующем виде:

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix},$$

γ^k – четыре образующих матрицы алгебры Дирака

$$\gamma^1 = i \begin{bmatrix} & -\sigma^1 \\ \sigma^1 & \end{bmatrix}, \qquad \gamma^2 = i \begin{bmatrix} & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & \end{bmatrix},$$

$$\gamma^3 = i \begin{bmatrix} & -\sigma^3 \\ \sigma^3 & \end{bmatrix}, \qquad \gamma^4 = -i \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}.$$

Спинорная форма уравнения Дирака в матричном виде:

$$\left(-i \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \partial_4 + i \begin{bmatrix} & -\sigma^a \\ \sigma^a & \end{bmatrix} \partial_a + \frac{m_e\, c}{\hbar} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix} = 0$$

Приведенное уравнение Дирака и входящие в него величины, в том числе и волновую функцию ψ мы отнесем к электрону. Далее мы воспользуемся предлагаемым алгебраическим подходом для того, чтобы раскрыть содержание волновой функции электрона.

II. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ ЭЛЕКТРОНА.

1. Комплексное представление.

Уравнение Дирака может быть однозначно переложено на величины, принятые нами в алгебраическом подходе.

$$\left(C^{iA_1}{}_{B_1}\, \partial_i + \frac{m_e\, c}{\hbar}\, C^{0A_1}{}_{B_1} \right) \cdot \psi^{B_1} = 0\,.$$

Здесь $C^{0A_1}{}_{B_1}$ – единичная матрица, а $C^{iA_1}{}_{B_1}$ – образующие структурные матрицы, ковариантной алгебры Клиффорда в первом сжатом комплексном представлении.* Эти матрицы совпадают с вышеприведенными матрицами Дирака, однако, алгебраический подход позволяет установить соответствие строк и столбцов матриц координатам вектора алгебры Клиффорда. В соответствии с разделом V Лекции 3 имеем следующую нумерацию строк и столбцов матриц $C^{iA_1}{}_{B_1}$ и $C^{0A_1}{}_{B_1}$

$$C^{0A_1}{}_{B_1} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 13 & 0 & 2 & 123 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array}$$

$$C^{1A_1}{}_{B_1} \sim i \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 13 & 0 & 2 & 123 \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & & -1 \\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array}$$

$$C^{2A_1}{}_{B_1} \sim i \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 13 & 0 & 2 & 123 \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & & i \\ & & -i & \\ & -i & & \\ i & & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array}$$

$$C^{3A_1}{}_{B_1} \sim i \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 13 & 0 & 2 & 123 \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & -1 \\ -1 & & & \\ & 1 & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array}$$

$$C^{4A_1}{}_{B_1} \sim -i \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 13 & 0 & 2 & 123 \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array}$$

Этим матрицам соответствует вектор ψ алгебры $\mathbb{C}_3$, на который проецируется вектор алгебры $\mathbb{C}_4$ в первом сжатом комплексном представлении †

$$\psi = \varepsilon_{13}\, \boldsymbol{\psi}^{13} + \varepsilon_0\, \boldsymbol{\psi}^0 + \varepsilon_2\, \boldsymbol{\psi}^2 + \varepsilon_{123}\, \boldsymbol{\psi}^{123}\,, \qquad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}^{13} &= i\,\psi^{32} + \psi^{13}\,, & \boldsymbol{\psi}^{2} &= i\,\psi^{1} + \psi^{2}\,, \\ \boldsymbol{\psi}^{0} &= i\,\psi^{21} + \psi^{0}\,, & \boldsymbol{\psi}^{123} &= i\,\psi^{3} + \psi^{123}\,, \end{aligned} \qquad (5)$$

С учетом этого столбец из компонент (комплексных координат) вектора ψ можно записать так

$$\psi^\beta \sim \psi = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\psi}^{13} \\ \boldsymbol{\psi}^{0} \\ \boldsymbol{\psi}^{2} \\ \boldsymbol{\psi}^{123} \end{vmatrix}\,. \qquad (6)$$

Сравнивая (6) и (2), а также (5) и (3), получим следующее соответствие между действительными координатами волновой функции Дирака и координатами вектора алгебры Клиффорда

$$\begin{array}{llll} \psi^{32} = \varphi^1\,, & \psi^{21} = \varphi^2\,, & \psi^{1} = \varphi^3\,, & \psi^{3} = \varphi^4\,, \\ \psi^{13} = \chi^1\,, & \psi^{0} = \chi^2\,, & \psi^{2} = \chi^3\,, & \psi^{123} = \chi^4\,. \end{array}$$

---

*Смотри раздел V Лекцию 3.

†Смотри разделы IIIA и IIB Лекции 4.

2. Кватернионное представление.

Обратимся теперь к кватернионному представлению ковариантной алгебры Клиффорда.[‡] Для него единичная матрица $C^{0A_2}{}_{B_2}$ и образующие структурные матрицы $C^{iA_2}{}_{B_2}$ в первом сжатом кватернионном представлении совпадают с вышеприведенными матрицами Дирака в спинорном представлении:

$$C^{0A_2}{}_{B_2} \sim \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|l} \hline \mathbb{1} & & 0 \\ \hline & \mathbb{1} & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$C^{1A_2}{}_{B_2} \sim \quad i \begin{array}{|c|c|l} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline & -\sigma^1 & 0 \\ \hline \sigma^1 & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$C^{2A_2}{}_{B_2} \sim \quad i \begin{array}{|c|c|l} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline & -\sigma^2 & 0 \\ \hline \sigma^2 & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$C^{3A_2}{}_{B_2} \sim \quad i \begin{array}{|c|c|l} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline & -\sigma^3 & 0 \\ \hline \sigma^3 & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$C^{4A_2}{}_{B_2} \sim -i \begin{array}{|c|c|l} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline & \mathbb{1} & 0 \\ \hline \mathbb{1} & & 123 \\ \hline \end{array}$$

Этим матрицам соответствует вектор ψ алгебры $\mathbb{C}_3$, на который проецируется вектор алгебры $\mathbb{C}_4$ в первом сжатом кватернионном представлении [*]

$$\psi = \Psi^0\,\varepsilon_0 + \Psi^{123}\,\varepsilon_{123}\,,$$

где кватернионные координаты имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi^0 \;\; &= a\,I\,\psi^{32} + b\,I\,\psi^{13} + i\,\psi^{21} + \psi^0\,, \\ \Psi^{123} &= a\,I\,\psi^1 \;\; + b\,I\,\psi^2 \;\; + i\,\psi^3 \;\; + \psi^{123}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

С учетом этого столбец из кватернионных координат вектора ψ можно записать так

$$\psi \sim \left| \begin{array}{l} \Psi^0 \\ \Psi^{123} \end{array} \right| \quad . \tag{8}$$

Сравнивая эти столбцы с (2), получим следующее соответствие между спинорами и кватернионными координатами вектора алгебры Клиффорда

$$\xi = \Psi^0\,, \qquad \eta = \Psi^{123}\,.$$

[‡]Смотри раздел V Лекции 3.
[*]Смотри разделы IIIA и IIB Лекции 4.

3. Действительное представление.

В заключении раздела II отметим, что уравнение Дирака может быть записано в действительном представлении алгебры Клиффорда. Эта форма уравнения Дирака, неизвестная ранее, следует из применяемого нами алгебраического подхода:

$$\left(C^{iA}{}_B\,\partial_i + \frac{m_e\,c}{\hbar}\,C^{0A}{}_B \right) \cdot \psi^B = 0\,.$$

Здесь индексы A, B принимают значения

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123)\,,$$

$C^{0A}{}_B$ – единичная матрица, а $C^{iA}{}_B$ – образующие структурные матрицы, ковариантной алгебры Клиффорда в первом сжатом действительном представлении[†]:

$$C^{0A}{}_B \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} \multicolumn{1}{c}{} & 32 & 13 & 21 & \multicolumn{1}{c}{0} & 1 & 2 & 3 & \multicolumn{1}{c}{123} \\ \hline 32 & 1 & & & & & & & \\ 13 & & 1 & & & & & & \\ 21 & & & 1 & & & & & \\ 0 & & & & 1 & & & & \\ \hline 1 & & & & & 1 & & & \\ 2 & & & & & & 1 & & \\ 3 & & & & & & & 1 & \\ 123 & & & & & & & & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$C^{1A}{}_B \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} \multicolumn{1}{c}{} & 32 & 13 & 21 & \multicolumn{1}{c}{0} & 1 & 2 & 3 & \multicolumn{1}{c}{123} \\ \hline 32 & & & & & & & & -1 \\ 13 & & & & & & & 1 & \\ 21 & & & & & & -1 & & \\ 0 & & & & & 1 & & & \\ \hline 1 & & & & 1 & & & & \\ 2 & & & -1 & & & & & \\ 3 & & 1 & & & & & & \\ 123 & -1 & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$C^{2A}{}_B \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} \multicolumn{1}{c}{} & 32 & 13 & 21 & \multicolumn{1}{c}{0} & 1 & 2 & 3 & \multicolumn{1}{c}{123} \\ \hline 32 & & & & & & & -1 & \\ 13 & & & & & & & & -1 \\ 21 & & & & & 1 & & & \\ 0 & & & & & & 1 & & \\ \hline 1 & & & 1 & & & & & \\ 2 & & & & 1 & & & & \\ 3 & -1 & & & & & & & \\ 123 & & -1 & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$C^{3A}{}_B \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} \multicolumn{1}{c}{} & 32 & 13 & 21 & \multicolumn{1}{c}{0} & 1 & 2 & 3 & \multicolumn{1}{c}{123} \\ \hline 32 & & & & & & 1 & & \\ 13 & & & & & -1 & & & \\ 21 & & & & & & & & -1 \\ 0 & & & & & & & 1 & \\ \hline 1 & & -1 & & & & & & \\ 2 & 1 & & & & & & & \\ 3 & & & & 1 & & & & \\ 123 & & & -1 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

[†]Смотри раздел V Лекцию 3.

$$
C^{4A}{}_{B} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & \mathit{42} & \mathit{14} & \mathit{1324} & \mathit{34} & \mathit{134} & \mathit{234} & \mathit{4} & \mathit{124} \\
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\
\hline
32 & & & & & & -1 & & \\
13 & & & & & 1 & & & \\
21 & & & & & & & & -1 \\
0 & & & & & & & 1 & \\
\hline
1 & & -1 & & & & & & \\
2 & 1 & & & & & & & \\
3 & & & & -1 & & & & \\
123 & & & 1 & & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

Им соответствует волновая функция электрона

$$
\begin{aligned}
\psi = \varepsilon_{32}\, \psi^{32} + \varepsilon_{13}\, \psi^{13} + \varepsilon_{21}\, \psi^{21} + \varepsilon_{0}\, \psi^{0} + \\
\varepsilon_{1}\, \psi^{1} + \varepsilon_{2}\, \psi^{2} + \varepsilon_{3}\, \psi^{3} + \varepsilon_{123}\, \psi^{123} \,,
\end{aligned}
$$

которая может быть представлена столбцом из действительных координат

$$
\psi = \begin{vmatrix} \psi^{32} \\ \psi^{13} \\ \psi^{21} \\ \psi^{0} \\ \psi^{1} \\ \psi^{2} \\ \psi^{3} \\ \psi^{123} \end{vmatrix} \,.
$$

Действительная форма уравнения Дирака может оказаться полезной при выполнении численных расчетов.

III. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ МЮОНА И τ-ЛЕПТОНА.

Мы определили координаты вектора действия (волновой функции) одной из фундаментальных частиц – электрона. Однако помимо электрона известны еще две фундаментальные частицы, ничем не отличающиеся* от электрона, за исключением массы, – мюон (μ) и τ-лептон (τ). Считается, что поведение мюона и τ-лептона, так же как и электрона, описывается уравнением Дирака (1), в котором вместо массы m_e фигурирует, соответственно, масса мюона m_μ или масса τ-лептона m_τ. С теоретической точки зрения наличие такого подобия частиц является загадкой. Попробуем рассмотреть эту проблему в рамках нашего алгебраического подхода. Пусть координаты вектора действия электрона известны. Тогда какими должны быть координаты еще двух векторов действия (соответствующих мюону и τ-лептону), отличных друг от друга, но для которых вид уравнения Дирака остается неизменным? Алгебраический подход дает на этот вопрос единственный ответ.

В разделе IIB Лекции 4 мы отметили особенность базисного вектора ε_{21}. Этот вектор является ключевым в организации комплексного представления. Именно этому вектору ставится в соответствие мнимая единица i. Имея в виду это соответствие, мы назвали направление ε_{21} основным. Однако, с алгебраической точки зрения направления ε_{13} и ε_{32} эквивалентны направлению ε_{21} и также могут быть приняты за основное. Для того, чтобы отличить эти случаи от предыдущего, мы договорились обозначать мнимую единицу через j, если за основное направление принят вектор ε_{13}, и обозначать мнимую единицу через k, если за основное направление принят вектор ε_{32}. Переход от одного основного направления к другому мы связываем с циклической перестановкой базисных векторов ε_1, ε_2, ε_3.

Итак, мы приняли, что порядку базисных векторов ε_1, ε_2, ε_3 соответствует базисный вектор основного направления ε_{21}. Этот способ организации алгебры Клиффорда мы поставили в соответствие электрону.

Если же мы изберем иной порядок базисных векторов ε_3, ε_1, ε_2, то базисным вектором основного направления будет ε_{13}. Такой способ организации алгебры Клиффорда мы поставим в соответствие мюону.

И наконец, алгебру Клиффорда с порядком базисных векторов ε_2, ε_3, ε_1 и базисным вектором основного направления ε_{32} мы поставим в соответствие τ-лептону.

Рассмотрим два последних случая.

1. Волновая функция и уравнение Дирака для мюона.

1. Действительное представление.

На основании ранее сказанного волновая функция мюона записывается так

$$
\begin{aligned}
\psi = \varepsilon_{21}\, \psi^{21} + \varepsilon_{32}\, \psi^{32} + \varepsilon_{13}\, \psi^{13} + \varepsilon_{0}\, \psi^{0} + \\
\varepsilon_{3}\, \psi^{3} + \varepsilon_{1}\, \psi^{1} + \varepsilon_{2}\, \psi^{2} + \varepsilon_{312}\, \psi^{312} \,,
\end{aligned}
$$

она может быть представлена столбцом из действительных координат

$$
\psi = \begin{vmatrix} \psi^{21} \\ \psi^{32} \\ \psi^{13} \\ \psi^{0} \\ \psi^{3} \\ \psi^{1} \\ \psi^{2} \\ \psi^{312} \end{vmatrix} \,.
$$

Уравнение Дирака для мюона в действительном представлении алгебры Клиффорда выглядит так:

$$
\left(C^{iA}{}_{B}\, \partial_i + \frac{m_\mu\, c}{\hbar}\, C^{0A}{}_{B} \right) \cdot \psi^{B} = 0 \,.
$$

---

*по сегодняшним представлениям

Здесь индексы A, B принимают значения

$$(21, 32, 13, 0, 3, 1, 2, 312)\,,$$

$C^{0A}{}_B$ – единичная матрица, а $C^{iA}{}_B$ – образующие структурные матрицы, ковариантной алгебры Клиффорда в первом сжатом действительном представлении*:

$$C^{0A}{}_B \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 21 & 32 & 13 & 0 & 3 & 1 & 2 & 312 \\ \hline
21 & 1 & & & & & & & \\
32 & & 1 & & & & & & \\
13 & & & 1 & & & & & \\
0 & & & & 1 & & & & \\ \hline
3 & & & & & 1 & & & \\
1 & & & & & & 1 & & \\
2 & & & & & & & 1 & \\
312 & & & & & & & & 1 \\ \hline
\end{array}$$

$$C^{1A}{}_B \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 21 & 32 & 13 & 0 & 3 & 1 & 2 & 312 \\ \hline
21 & & & & & & & -1 & \\
32 & & & & & & & & -1 \\
13 & & & & & 1 & & & \\
0 & & & & & & 1 & & \\ \hline
3 & & & 1 & & & & & \\
1 & & & & 1 & & & & \\
2 & -1 & & & & & & & \\
312 & & -1 & & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$C^{2A}{}_B \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 21 & 32 & 13 & 0 & 3 & 1 & 2 & 312 \\ \hline
21 & & & & & & 1 & & \\
32 & & & & & -1 & & & \\
13 & & & & & & & & -1 \\
0 & & & & & & & 1 & \\ \hline
3 & & -1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & & \\
2 & & & & 1 & & & & \\
312 & & & -1 & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$C^{3A}{}_B \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 21 & 32 & 13 & 0 & 3 & 1 & 2 & 312 \\ \hline
21 & & & & & & & & -1 \\
32 & & & & & & & 1 & \\
13 & & & & & & -1 & & \\
0 & & & & & 1 & & & \\ \hline
3 & & & & 1 & & & & \\
1 & & & -1 & & & & & \\
2 & & 1 & & & & & & \\
312 & -1 & & & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$C^{4A}{}_B \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & \mathit{41} & \mathit{34} & \mathit{3214} & \mathit{24} & \mathit{324} & \mathit{124} & \mathit{4} & \mathit{314} \\
 & 21 & 32 & 13 & 0 & 3 & 1 & 2 & 312 \\ \hline
21 & & & & & & -1 & & \\
32 & & & & & 1 & & & \\
13 & & & & & & & & -1 \\
0 & & & & & & & 1 & \\ \hline
3 & & -1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & & \\
2 & & & & -1 & & & & \\
312 & & & 1 & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

*Смотри раздел V Лекцию 3.

2. Комплексное представление.

Волновая функция мюона в комплексном представлении записывается так

$$\psi = \varepsilon_{32}\, \boldsymbol{\psi}^{32} + \varepsilon_0\, \boldsymbol{\psi}^0 + \varepsilon_1\, \boldsymbol{\psi}^1 + \varepsilon_{312}\, \boldsymbol{\psi}^{312}\,,$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}^{32} &= j\,\psi^{21} + \psi^{32}\,, \qquad & \boldsymbol{\psi}^{0} &= j\,\psi^{13} + \psi^{0}\,, \\ \boldsymbol{\psi}^{1} &= j\,\psi^{3} + \psi^{1}\,, \qquad & \boldsymbol{\psi}^{312} &= j\,\psi^{2} + \psi^{312}\,. \end{aligned} \tag{9}$$

С учетом этого столбец из комплексных координат вектора ψ для мюона можно записать так

$$\psi \sim \begin{vmatrix} \boldsymbol{\psi}^{32} \\ \boldsymbol{\psi}^{0} \\ \boldsymbol{\psi}^{1} \\ \boldsymbol{\psi}^{312} \end{vmatrix} \quad .$$

Уравнение Дирака для мюона в комплексном представлении алгебры Клиффорда выглядит так:

$$\left(C^{iA_1}{}_{B_1}\, \partial_i + \frac{m_\mu\, c}{\hbar}\, C^{0A_1}{}_{B_1} \right) \cdot \psi^{B_1} = 0\,.$$

Здесь индексы A_1, B_1 принимают значения

$$(32, 0, 1, 312)\,,$$

$C^{0A_1}{}_{B_1}$ – единичная матрица, а $C^{iA_1}{}_{B_1}$ – образующие структурные матрицы, ковариантной алгебры Клиффорда в первом сжатом комплексном представлении:

$$C^{0A_1}{}_{B_1} \sim \begin{array}{|cc|cc|c}
32 & 0 & 1 & 312 & \\ \hline
1 & & & & 32 \\
 & 1 & & & 0 \\ \hline
 & & 1 & & 1 \\
 & & & 1 & 312 \\ \hline
\end{array}$$

$$C^{1A_1}{}_{B_1} \sim j \begin{array}{|cc|cc|c}
32 & 0 & 1 & 312 & \\ \hline
 & & & j & 32 \\
 & & -j & & 0 \\ \hline
 & -j & & & 1 \\
j & & & & 312 \\ \hline
\end{array}$$

$$C^{2A_1}{}_{B_1} \sim j \begin{array}{|cc|cc|c}
32 & 0 & 1 & 312 & \\ \hline
 & & 1 & & 32 \\
 & & & -1 & 0 \\ \hline
-1 & & & & 1 \\
 & 1 & & & 312 \\ \hline
\end{array}$$

$$C^{3A_1}{}_{B_1} \sim j \begin{array}{|cc|cc|c}
32 & 0 & 1 & 312 & \\ \hline
 & & & -1 & 32 \\
 & & -1 & & 0 \\ \hline
 & 1 & & & 1 \\
1 & & & & 312 \\ \hline
\end{array}$$

$$C^{4A_1}{}_{B_1} \sim -j \begin{array}{|cc|cc|c}
32 & 0 & 1 & 312 & \\ \hline
 & & 1 & & 32 \\
 & & & 1 & 0 \\ \hline
1 & & & & 1 \\
 & 1 & & & 312 \\ \hline
\end{array}$$

3. Кватернионное представление.

Волновая функция мюона в кватернионном представлении записывается следующим образом

$$\psi = \Psi^0\,\varepsilon_0 + \Psi^{312}\,\varepsilon_{312}\,.$$

где кватернионные координаты имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi^0 \;&= a\,J\,\psi^{21} + b\,J\,\psi^{32} + j\,\psi^{13} + \psi^0\,, \\ \Psi^{312} &= a\,J\,\psi^3 \;\; + b\,J\,\psi^1 \;\; + j\,\psi^2 \;\; + \psi^{312}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

С учетом этого столбец из кватернионных координат вектора ψ можно записать так

$$\psi \sim \begin{vmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{312} \end{vmatrix} \quad . \tag{11}$$

Уравнение Дирака для кватернионных координат имеет вид

$$\left(C^{iA_2}{}_{B_2}\,\partial_i + \frac{m_\mu\,c}{\hbar}\,C^{0A_2}{}_{B_2} \right) \cdot \psi^{B_2} = 0\,.$$

Здесь индексы A_2, B_2 принимают значения

$$(0, 312)\,,$$

$C^{0A_2}{}_{B_2}$ – единичная матрица, а $C^{iA_2}{}_{B_2}$ – образующие структурные матрицы в первом сжатом кватернионном представлении:

$$C^{0A_2}{}_{B_2} \sim \begin{array}{cc} \scriptstyle 0 \;\; 312 & \\ \boxed{\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & \\ \hline & \mathbb{1} \end{array}} & \begin{array}{l} \scriptstyle 0 \\ \scriptstyle 312 \end{array} \end{array}$$

$$C^{1A_2}{}_{B_2} \sim \quad j \begin{array}{cc} \scriptstyle 0 \;\; 312 & \\ \boxed{\begin{array}{c|c} & -\mu^1 \\ \hline \mu^1 & \end{array}} & \begin{array}{l} \scriptstyle 0 \\ \scriptstyle 312 \end{array} \end{array}$$

$$C^{2A_2}{}_{B_2} \sim \quad j \begin{array}{cc} \scriptstyle 0 \;\; 312 & \\ \boxed{\begin{array}{c|c} & -\mu^2 \\ \hline \mu^2 & \end{array}} & \begin{array}{l} \scriptstyle 0 \\ \scriptstyle 312 \end{array} \end{array}$$

$$C^{3A_2}{}_{B_2} \sim \quad j \begin{array}{cc} \scriptstyle 0 \;\; 312 & \\ \boxed{\begin{array}{c|c} & -\mu^3 \\ \hline \mu^3 & \end{array}} & \begin{array}{l} \scriptstyle 0 \\ \scriptstyle 312 \end{array} \end{array}$$

$$C^{4A_2}{}_{B_2} \sim -j \begin{array}{cc} \scriptstyle 0 \;\; 312 & \\ \boxed{\begin{array}{c|c} & \mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & \end{array}} & \begin{array}{l} \scriptstyle 0 \\ \scriptstyle 312 \end{array} \end{array}$$

Здесь введены переставленные матрицы Паули:

$$\mathbb{1} = \boxed{\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 1 \end{array}}\,, \quad \mu^1 = \boxed{\begin{array}{c|c} & -j \\ \hline j & \end{array}}\,, \quad \mu^2 = \boxed{\begin{array}{c|c} -1 & \\ \hline & 1 \end{array}}\,, \quad \mu^3 = \boxed{\begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 1 & \end{array}}\,.$$

Отсюда уравнение Дирака для мюона в матричном виде выглядит так:

$$\left(-j\,\boxed{\begin{array}{c|c} & \mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & \end{array}}\;\partial_4 + j\,\boxed{\begin{array}{c|c} & -\mu^a \\ \hline \mu^a & \end{array}}\;\partial_a + \frac{m_\mu\,c}{\hbar}\,\boxed{\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & \\ \hline & \mathbb{1} \end{array}} \right) \begin{vmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{312} \end{vmatrix} = 0$$

2. Волновая функция и уравнение Дирака для τ-лептона.

1. Действительное представление.

Волновая функция для τ-лептона в действительном представлении

$$\begin{aligned} \psi = \varepsilon_{13}\,\psi^{13} + \varepsilon_{21}\,\psi^{21} + \varepsilon_{32}\,\psi^{32} + \varepsilon_0\,\psi^0 + \\ \varepsilon_2\,\psi^2 + \varepsilon_3\,\psi^3 + \varepsilon_1\,\psi^1 + \varepsilon_{231}\,\psi^{231}\,, \end{aligned}$$

может быть представлена столбцом из действительных координат

$$\psi = \begin{vmatrix} \psi^{13} \\ \psi^{21} \\ \psi^{32} \\ \psi^0 \\ \psi^2 \\ \psi^2 \\ \psi^1 \\ \psi^{231} \end{vmatrix} \quad .$$

Уравнение Дирака для τ-лептона в действительном представлении имеет вид:

$$\left(C^{iA}{}_B\,\partial_i + \frac{m_\tau\,c}{\hbar}\,C^{0A}{}_B \right) \cdot \psi^B = 0\,.$$

Здесь индексы A, B принимают значения

$$(13, 21, 32, 0, 2, 3, 1, 231)\,,$$

- $C^{0A}{}_B$ – единичная матрица

$$C^{0A}{}_B \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 13 & 21 & 32 & 0 & 2 & 3 & 1 & 231 \\ \hline 13 & 1 & & & & & & & \\ 21 & & 1 & & & & & & \\ 32 & & & 1 & & & & & \\ 0 & & & & 1 & & & & \\ \hline 2 & & & & & 1 & & & \\ 3 & & & & & & 1 & & \\ 1 & & & & & & & 1 & \\ 231 & & & & & & & & 1 \\ \hline \end{array}$$

- $C^{iA}{}_B$ – образующие матрицы

$$C^{1A}{}_B \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 13 & 21 & 32 & 0 & 2 & 3 & 1 & 231 \\ \hline 13 & & & & & & 1 & & \\ 21 & & & & & -1 & & & \\ 32 & & & & & & & & -1 \\ 0 & & & & & & & 1 & \\ \hline 2 & & -1 & & & & & & \\ 3 & 1 & & & & & & & \\ 1 & & & & 1 & & & & \\ 231 & & & -1 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$C^{2A}{}_B \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 13 & 21 & 32 & 0 & 2 & 3 & 1 & 231 \\ \hline 13 & & & & & & & & -1 \\ 21 & & & & & & & 1 & \\ 32 & & & & & & -1 & & \\ 0 & & & & & 1 & & & \\ \hline 2 & & & & 1 & & & & \\ 3 & & & -1 & & & & & \\ 1 & & 1 & & & & & & \\ 231 & -1 & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$
C^{3A}{}_{B} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 21 & 32 & 0 & 2 & 3 & 1 & 231 \\
\hline
13 & & & & & & & -1 & \\
21 & & & & & & & & -1 \\
32 & & & & & 1 & & & \\
0 & & & & & & 1 & & \\
\hline
2 & & & 1 & & & & & \\
3 & & & & 1 & & & & \\
1 & -1 & & & & & & & \\
231 & & -1 & & & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
C^{4A}{}_{B} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 24 & & 14 & & & 314 & & 234 \\
 & 43 & & 2134 & & 214 & & 4 & \\
 & 13 & 21 & 32 & 0 & 2 & 3 & 1 & 231 \\
\hline
13 & & & & & & -1 & & \\
21 & & & & & 1 & & & \\
32 & & & & & & & & -1 \\
0 & & & & & & & 1 & \\
\hline
2 & & -1 & & & & & & \\
3 & 1 & & & & & & & \\
1 & & & & -1 & & & & \\
231 & & & 1 & & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

2. Комплексное представление.

Волновая функция для τ-лептона в комплексном представлении имеет вид

$$
\psi = \varepsilon_{21}\, \boldsymbol{\psi}^{21} + \varepsilon_0\, \boldsymbol{\psi}^{0} + \varepsilon_3\, \boldsymbol{\psi}^{3} + \varepsilon_{231}\, \boldsymbol{\psi}^{231} \,,
$$

где

$$
\begin{array}{ll}
\boldsymbol{\psi}^{21} = k\,\psi^{13} + \psi^{21}\,, & \boldsymbol{\psi}^{0} \ \ = k\,\psi^{32} + \psi^{0}\,, \\
\boldsymbol{\psi}^{3} \ \ = k\,\psi^{2} \ + \psi^{3}\,, & \boldsymbol{\psi}^{231} = k\,\psi^{1} \ + \psi^{231}\,,
\end{array}
\tag{12}
$$

Уравнение Дирака для τ-лептона в комплексном представлении алгебры Клиффорда выглядит так:

$$
\left(C^{iA_1}{}_{B_1}\, \partial_i + \frac{m_\tau\, c}{\hbar}\, C^{0A_1}{}_{B_1} \right) \cdot \psi^{B_1} = 0\,.
$$

Здесь индексы A_1, B_1 принимают значения

$$
(21, 0, 3, 231)\,.
$$

$C^{0A_1}{}_{B_1}$ – единичная матрица, а $C^{iA_1}{}_{B_1}$ – образующие структурные матрицы, ковариантной алгебры Клиффорда в первом сжатом комплексном представлении:

$$
C^{0A_1}{}_{B_1} \sim
\begin{array}{|cc|cc|c}
21 & 0 & 3 & 231 & \\
\hline
1 & & & & 21 \\
 & 1 & & & 0 \\
\hline
 & & 1 & & 3 \\
 & & & 1 & 231 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
C^{1A_1}{}_{B_1} \sim k
\begin{array}{|cc|cc|c}
21 & 0 & 3 & 231 & \\
\hline
 & & 1 & & 21 \\
 & & & -1 & 0 \\
\hline
-1 & & & & 3 \\
 & 1 & & & 231 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
C^{2A_1}{}_{B_1} \sim k
\begin{array}{|cc|cc|c}
21 & 0 & 3 & 231 & \\
\hline
 & & & -1 & 21 \\
 & & -1 & & 0 \\
\hline
 & 1 & & & 3 \\
1 & & & & 231 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
C^{3A_1}{}_{B_1} \sim k
\begin{array}{|cc|cc|c}
21 & 0 & 3 & 231 & \\
\hline
 & & & k & 21 \\
 & & -k & & 0 \\
\hline
 & -k & & & 3 \\
k & & & & 231 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
C^{4A_1}{}_{B_1} \sim -k
\begin{array}{|cc|cc|c}
21 & 0 & 3 & 231 & \\
\hline
 & & 1 & & 21 \\
 & & & 1 & 0 \\
\hline
1 & & & & 3 \\
 & 1 & & & 231 \\
\hline
\end{array}
$$

3. Кватернионное представление.

Волновая функция τ-лептона в кватернионном представлении записывается следующим образом

$$
\psi = \Psi^0\, \varepsilon_0 + \Psi^{231}\, \varepsilon_{231}\,,
$$

где кватернионные координаты имеют вид

$$
\begin{array}{l}
\Psi^0 \quad = a\,K\,\psi^{13} + b\,K\,\psi^{21} + k\,\psi^{32} + \psi^0\,, \\
\Psi^{231} = a\,K\,\psi^{2} \ + b\,K\,\psi^{3} \ + k\,\psi^{1} \ + \psi^{231}\,.
\end{array}
\tag{13}
$$

С учетом этого столбец из кватернионных координат вектора ψ можно записать так

$$
\psi \sim \begin{vmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{231} \end{vmatrix} \quad . \tag{14}
$$

Уравнение Дирака для кватернионных координат имеет вид

$$
\left(C^{iA_2}{}_{B_2}\, \partial_i + \frac{m_\tau\, c}{\hbar}\, C^{0A_2}{}_{B_2} \right) \cdot \psi^{B_2} = 0\,.
$$

Здесь индексы A_2, B_2 принимают значения

$$
(0, 231)\,,
$$

$C^{0A_2}{}_{B_2}$ – единичная матрица, а $C^{iA_2}{}_{B_2}$ – образующие структурные матрицы в первом сжатом кватернионном представлении:

$$
C^{0A_2}{}_{B_2} \sim
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 231 & \\
\hline
\mathbb{1} & & 0 \\
\hline
 & \mathbb{1} & 231 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
C^{1A_2}{}_{B_2} \sim \quad k
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 231 & \\
\hline
 & -\tau^1 & 0 \\
\hline
\tau^1 & & 231 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
C^{2A_2}{}_{B_2} \sim \quad k
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 231 & \\
\hline
 & -\tau^2 & 0 \\
\hline
\tau^2 & & 231 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
C^{3A_2}{}_{B_2} \sim \quad k
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 231 & \\
\hline
 & -\tau^3 & 0 \\
\hline
\tau^3 & & 231 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
C^{4A_2}{}_{B_2} \sim -k \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} 0 & 231 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 231 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & \\ \hline \end{array} \end{array}
$$

Здесь введены переставленные матрицы Паули:

$$
\mathbb{1} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}\,, \quad \tau^1 = \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}\,, \quad \tau^2 = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}\,, \quad \tau^3 = \begin{array}{|c|c|} \hline & -k \\ \hline k & \\ \hline \end{array}\,.
$$

Отсюда уравнение Дирака для τ-лептона в матричном виде выглядит так:

$$
\left(-k \begin{array}{|c|c|} \hline & \mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & \\ \hline \end{array}\ \partial_4 + k \begin{array}{|c|c|} \hline & -\tau^a \\ \hline \tau^a & \\ \hline \end{array}\ \partial_a + \frac{m_\tau\, c}{\hbar} \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbb{1} & \\ \hline & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} \right) \begin{vmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{231} \end{vmatrix} = 0
$$

Изложенная точка зрения приводит к интересному и непонятному заключению. Циклическая перестановка базисных векторов ε_1, ε_2, ε_3 описывает волновые функции частиц разной массы, следовательно с энергетической точки зрения эти направления анизотропны.

IV. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЧАСТИЦЫ – ЛЕПТОНЫ.

Фундаментальные частицы электрон (e), мюон (μ) и τ-лептон (τ) объединены в один класс элементарных частиц, которые называются *лептонами.* Для этого класса частиц характерно их неучастие в сильном взаимодействии. Экспериментально установлен удивительный факт, состоящий в том, что у каждого из указанных лептонов существует партнер, называемый соответствующим нейтрино. У электрона это – электронное нейтрино (ν_e), у мюона это – мюонное нейтрино (ν_μ), у τ-лептона это – таулептонное нейтрино (ν_τ). Нейтрино также являются лептонами, а связь между нейтрино и соответствующими им лептонами настолько существенна, что пары соответствующих лептонов объединены в группы называемые *поколениями.* Таблица сгруппированных лептонов имеет вид

1 поколение	2 поколение	3 поколение
ν_e	ν_μ	ν_τ
e	μ	τ

Явление, благодаря которому лептон и нейтрино объединяются в поколение, состоит в сохранении разности числа лептонов и антилептонов каждого из поколений при взаимодействиях элементарных частиц.

Для нас будет важно следующее обстоятельство. При формулировке теории электрослабого взаимодействия лептонов рассматривается волновая функция лептонов одного поколения (например, e и ν_e). Эта функция составляется волевым образом (то есть без существенного обоснования) из волновых функций этих лептонов. Точнее нужно сказать так. Столбец компонент волновой функции лептонов одного поколения складывается из компонент волновых функций каждого из лептонов этого поколения.

И теперь, имея в виду все вышесказанное, зададимся следующим вопросом. Можно ли в рамках алгебраического подхода объяснить партнерство между лептонами одного поколения?

V. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ ЛЕПТОНОВ ПЕРВОГО ПОКОЛЕНИЯ.

Обратимся снова к уравнению Дирака. Как указывалось, волновая функция и матрицы, входящие в него, в алгебраическом подходе соответствуют первому сжатому представлению алгебры $\mathbb{C}_4$ в ее подалгебре $\mathbb{C}_3$, построенной на базисных векторах

$$
\varepsilon_{32}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_{123}\,.
$$

При этом базисные векторы

$$
\varepsilon_{42}, \varepsilon_{14}, \varepsilon_{1324}, \varepsilon_{34}, \varepsilon_{134}, \varepsilon_{234}, \varepsilon_4, \varepsilon_{124}
$$

приравниваются вышеуказанным базисным векторам соответственно, т.е. происходит *вырождение* компонент векторов алгебры Клиффорда. При этом размерность структурных матриц алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_4$ понижается вдвое и равна 8×8 в действительном представлении, 4×4 в комплексном представлении и 2×2 в кватернионном представлении, что как раз и свойственно теории Дирака.

Таким образом, используя полноценную алгебру Клиффорда мы получили нечто большее, нежели формализм Дирака. Волновая функция в общем случае содержит в два раза больше компонент, чем в теории Дирака.

Отсюда возникает вопрос: если теория Дирака при наличии вырождения компонент вектора действия описывает, допустим, электрон, то с чем необходимо связать появление дополнительных компонент при снятии вырождения?

Мы знаем, что согласно электрослабой теории электрон и электронное нейтрино представляют собой взаимосвязанный объект. Его волновая функция представляет собой столбец компонент, в котором к компонентам, относящимся к электрону, добавляются компоненты, относящиеся к нейтрино. Это очень похоже на то как если бы мы сняли вырождение между компонентами электрона и электронного нейтрино. Т.е. надо попытаться использовать "лишние"компоненты волновой функции для описания электронного нейтрино, а всю волновую функцию отнести к двум частицам первого поколения – электрону и электронному нейтрино. Обобщенное уравнение релятивистской квантовой механики, соответствующее этой концепции мы рассмотрим в Лекции 9. Предварительно можно сказать следующее. При вырождении компонент волновой функции лептонов первого поколения (то есть, при первом сжатии) обобщенное уравнение должно сводиться к уравнению Дирака как для электрона, так и для нейтрино. Кроме того, электрослабая теория должна строиться на основании обобщенного уравнения естественным образом, без волевого конструирования, имеющего место в настоящее время.

Итак, мы принимаем следующее положение: полный вектор алгебры действия $\mathbb{C}_4$ представляет собой волновую функцию лептонов одного поколения. Далее приведем волновую функцию лептонов первого поколения и соответствующие ей структурные матрицы, обобщающие матрицы Дирака в действительном, комплексном и кватернионном представлениях.

1. Действительное представление.

Волновая функция для лептонов первого поколения в действительном представлении есть суперпозиция волновых функций электрона и его нейтрино:

$$\begin{gathered}\psi = \varepsilon_{32}\,\psi^{32} + \varepsilon_{13}\,\psi^{13} + \varepsilon_{21}\,\psi^{21} + \varepsilon_{0}\,\psi^{0} + \\ \varepsilon_{42}\,\psi^{42} + \varepsilon_{14}\,\psi^{14} + \varepsilon_{1324}\,\psi^{1324} + \varepsilon_{34}\,\psi^{34} + \\ \varepsilon_{1}\,\psi^{1} + \varepsilon_{2}\,\psi^{2} + \varepsilon_{3}\,\psi^{3} + \varepsilon_{123}\,\psi^{123} + \\ \varepsilon_{134}\,\psi^{134} + \varepsilon_{234}\,\psi^{234} + \varepsilon_{4}\,\psi^{4} + \varepsilon_{124}\,\psi^{124}\,,\end{gathered}$$

Если $C^{0A}{}_B$ – единичная матрица, а $C^{iA}{}_B$ – образующие структурные матрицы в действительном представлении, то в соответствии с разделом V.4.2 Лекции 3 имеем

$C^{0A}{}_B \sim$

	32	13	21	0	42	14	1324	34	1	2	3	123	134	234	4	124
32	1															
13		1														
21			1													
0				1												
42					1											
14						1										
1324							1									
34								1								
1									1							
2										1						
3											1					
123												1				
134													1			
234														1		
4															1	
124																1

$C^{1A}{}_B \sim$

	32	13	21	0	42	14	1324	34	1	2	3	123	134	234	4	124
32												-1				
13											1					
21										-1						
0									1							
42																-1
14															1	
1324														-1		
34													1			
1				1												
2			-1													
3		1														
123	-1															
134								1								
234							-1									
4						1										
124					-1											

$C^{2A}{}_B \sim$

	32	13	21	0	42	14	1324	34	1	2	3	123	134	234	4	124
32											-1					
13												-1				
21									1							
0										1						
42															-1	
14																-1
1324													1			
34														1		
1			1													
2				1												
3	-1															
123		-1														
134							1									
234								1								
4					-1											
124						-1										

$C^{3A}{}_B \sim$

	32	13	21	0	42	14	1324	34	1	2	3	123	134	234	4	124
32										1						
13									-1							
21												-1				
0											1					
42														1		
14													-1			
1324																-1
34															1	
1		-1														
2	1															
3				1												
123			-1													
134						-1										
234					1											
4								1								
124							-1									

$C^{4A}{}_B \sim$

	32	13	21	0	42	14	1324	34	1	2	3	123	134	234	4	124
32														-1		
13													1			
21																-1
0															1	
42										-1						
14									1							
1324												-1				
34											1					
1						-1										
2					1											
3								-1								
123							1									
134		-1														
234	1															
4				-1												
124			1													

2. Комплексное представление.

Волновая функция для лептонов первого поколения в комплексном представлении имеет вид

$$\begin{gathered}\psi = \varepsilon_{13}\,\boldsymbol{\psi}^{13} + \varepsilon_{0}\,\boldsymbol{\psi}^{0} + \varepsilon_{14}\,\boldsymbol{\psi}^{14} + \varepsilon_{34}\,\boldsymbol{\psi}^{34} + \\ \varepsilon_{2}\,\boldsymbol{\psi}^{2} + \varepsilon_{123}\,\boldsymbol{\psi}^{123} + \varepsilon_{234}\,\boldsymbol{\psi}^{234} + \varepsilon_{124}\,\boldsymbol{\psi}^{124}\,,\end{gathered}$$

где координаты (компоненты) вектора являются комплексными:

$$
\begin{array}{llll}
\boldsymbol{\psi}^{13} = i\,\psi^{32} + \psi^{13}\,, & \boldsymbol{\psi}^{0} = i\,\psi^{21} + \psi^{0}\,, \\
\boldsymbol{\psi}^{14} = i\,\psi^{42} + \psi^{14}\,, & \boldsymbol{\psi}^{34} = i\,\psi^{1324} + \psi^{34}\,, \\
\boldsymbol{\psi}^{2} = i\,\psi^{1} + \psi^{2}\,, & \boldsymbol{\psi}^{123} = i\,\psi^{3} + \psi^{123}\,, \\
\boldsymbol{\psi}^{234} = i\,\psi^{134} + \psi^{234}\,, & \boldsymbol{\psi}^{124} = i\,\psi^{4} + \psi^{124}\,.
\end{array}
\tag{15}
$$

Пусть $C^{0A_1}{}_{B_1}$ – единичная матрица, а $C^{iA_1}{}_{B_1}$ – образующие структурные матрицы в комплексном представлении. В соответствии с разделом V.4.2 Лекции 3 имеем

$$
C^{0A_1}{}_{B_1} \sim 1 \quad
\begin{array}{cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\
\hline
1 & & & & & & & & 13 \\
 & 1 & & & & & & & 0 \\
 & & 1 & & & & & & 14 \\
 & & & 1 & & & & & 34 \\
\hline
 & & & & 1 & & & & 2 \\
 & & & & & 1 & & & 123 \\
 & & & & & & 1 & & 234 \\
 & & & & & & & 1 & 124 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
C^{1A_1}{}_{B_1} \sim i \quad
\begin{array}{cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\
\hline
 & & & & & -1 & & & 13 \\
 & & & & -1 & & & & 0 \\
 & & & & & & & -1 & 14 \\
 & & & & & & -1 & & 34 \\
\hline
 & 1 & & & & & & & 2 \\
1 & & & & & & & & 123 \\
 & & & 1 & & & & & 234 \\
 & & 1 & & & & & & 124 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
C^{2A_1}{}_{B_1} \sim i \quad
\begin{array}{cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\
\hline
 & & & & & i & & & 13 \\
 & & & & -i & & & & 0 \\
 & & & & & & & i & 14 \\
 & & & & & & -i & & 34 \\
\hline
 & -i & & & & & & & 2 \\
i & & & & & & & & 123 \\
 & & & -i & & & & & 234 \\
 & & i & & & & & & 124 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
C^{3A_1}{}_{B_1} \sim i \quad
\begin{array}{cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\
\hline
 & & & & 1 & & & & 13 \\
 & & & & & -1 & & & 0 \\
 & & & & & & 1 & & 14 \\
 & & & & & & & -1 & 34 \\
\hline
-1 & & & & & & & & 2 \\
 & 1 & & & & & & & 123 \\
 & & -1 & & & & & & 234 \\
 & & & 1 & & & & & 124 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
C^{4A_1}{}_{B_1} \sim -i \quad
\begin{array}{cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\
\hline
 & & & & & & 1 & & 13 \\
 & & & & & & & 1 & 0 \\
 & & & & 1 & & & & 14 \\
 & & & & & 1 & & & 34 \\
\hline
 & & 1 & & & & & & 2 \\
 & & & 1 & & & & & 123 \\
1 & & & & & & & & 234 \\
 & 1 & & & & & & & 124 \\
\hline
\end{array}
$$

3. Кватернионное представление.

Волновая функция для лептонов первого поколения в кватернионном представлении имеет вид

$$
\psi = \Psi^{0}\,\varepsilon_0 + \Psi^{34}\,\varepsilon_{34} + \Psi^{123}\,\varepsilon_{123} + \Psi^{124}\,\varepsilon_{124}\,.
$$

Здесь координаты(компоненты) вектора являются кватернионами.

$$
\begin{array}{l}
\Psi^{0} = a\,I\,\psi^{32} + b\,I\,\psi^{13} + i\,\psi^{21} + \psi^{0}\,, \\
\Psi^{34} = a\,I\,\psi^{42} + b\,I\,\psi^{14} + i\,\psi^{1324} + \psi^{34}\,, \\
\Psi^{123} = a\,I\,\psi^{1} + b\,I\,\psi^{2} + i\,\psi^{3} + \psi^{123}\,, \\
\Psi^{124} = a\,I\,\psi^{134} + b\,I\,\psi^{234} + i\,\psi^{4} + \psi^{124}\,.
\end{array}
\tag{16}
$$

Пусть $C^{0A_2}{}_{B_2}$ – единичная матрица, а $C^{iA_2}{}_{B_2}$ – образующие структурные матрицы алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_4$ в кватернионном представлении, где индексы A_2, B_2 принимают значения

$$
0,\ 34,\ 123,\ 124\,.
$$

В соответствии с разделом V.4.2 Лекции 3 имеем

$$
C^{0A_2}{}_{B_2} \sim 1 \quad
\begin{array}{cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\
\hline
\mathbb{1} & & & & 0 \\
 & \mathbb{1} & & & 34 \\
\hline
 & & \mathbb{1} & & 123 \\
 & & & \mathbb{1} & 124 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
C^{1A_2}{}_{B_2} \sim i \quad
\begin{array}{cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\
\hline
 & & -\sigma^1 & & 0 \\
 & & & -\sigma^1 & 34 \\
\hline
\sigma^1 & & & & 123 \\
 & \sigma^1 & & & 124 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
C^{2A_2}{}_{B_2} \sim i \quad
\begin{array}{cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\
\hline
 & & -\sigma^2 & & 0 \\
 & & & -\sigma^2 & 34 \\
\hline
\sigma^2 & & & & 123 \\
 & \sigma^2 & & & 124 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
C^{3A_2}{}_{B_2} \sim i \quad
\begin{array}{cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\
\hline
 & & -\sigma^3 & & 0 \\
 & & & -\sigma^3 & 34 \\
\hline
\sigma^3 & & & & 123 \\
 & \sigma^3 & & & 124 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
C^{4A_2}{}_{B_2} \sim -i \quad
\begin{array}{cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\
\hline
 & & & \mathbb{1} & 0 \\
 & & \mathbb{1} & & 34 \\
\hline
 & \mathbb{1} & & & 123 \\
\mathbb{1} & & & & 124 \\
\hline
\end{array}
$$

VI. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ЛЕПТОНОВ РАЗНЫХ ПОКОЛЕНИЙ

Совершенно аналогично электрону и его нейтрино описываются лептоны других поколений. Для этого рассмотреть векторы алгебры $\mathbb{C}_4$, отличающиеся перестановкой базисных векторов ε_1, ε_2, ε_3 и соответствующим выбором базисного вектора основного направления. Это либо ε_{21}, либо ε_{13}, либо ε_{32}.

На основании изложенного установим следующее соответствие между компонентами волновой функции и лептонами. Компоненты волновой функции ψ^A, где индекс A принимает значения в следующей последовательности

$$32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124,$$

поставим в соответствие лептонам первого поколения.

Компоненты волновой функции ψ^A, где индекс A принимает значения в следующей последовательности

$$21, 32, 13, 0, 41, 34, 3214, 24, 3, 1, 2, 312, 324, 124, 4, 314,$$

поставим в соответствие лептонам второго поколения.

Компоненты волновой функции ψ^A, где индекс A принимает значения в следующей последовательности

$$13, 21, 32, 0, 43, 24, 2134, 14, 2, 3, 1, 231, 214, 314, 4, 234,$$

поставим в соответствие лептонам третьего поколения.

Для каждой из указанных последовательностей индексов должны быть вычислены структурные матрицы подобно тому, как мы это делали в Разделе III. *

В заключении лекции остановимся на двух вопросах, которые требуют дополнительного исследования.

1. В уравнении Дирака (1) мы используем те матрицы, которые получили при вычислении. Поэтому мы сталкиваемся с неустранимым отличием уравнения (1) от общепринятого. Дело в том, что вычисления приводят к матрице γ^3, отличающейся знаком от общепринятой, так как матрица σ^3 (и только она) у нас отличается от соответствующей матрицы Паули противоположным знаком. Отсюда возникает *вопрос, над которым стоит подумать:* можно ли путем вычисления каких-либо эффектов выяснить истинный знак γ^3?

2. Мы выяснили, что матрицы Дирака и уравнение Дирака соответствует сжатому представлению структурных матриц и векторов алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_4$. В Лекции 3 мы указывали, что при этом часть структурных матриц представляется точно, а другая часть структурных матриц представляется приближенно. Для уравнения Дирака (6) такой приближенно представляемой матрицей является γ^4. Отсюда *вопрос, над которым стоит подумать:* можно ли путем вычисления каких-либо эффектов установить приближенный характер γ^4?

*Заметим еще раз, что с математической точки зрения выбор последовательности индексов несущественен, однако с физической точки зрения, видимо, это не так. С группировкой индексов в определенной последовательности нужно связывать определенный физический порядок.

VII. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЧАСТИЦЫ – КВАРКИ.

Помимо лептонов существуют фундаментальные частицы, называемые *кварками*, которые объединены в другой класс элементарных частиц. Для этого класса частиц характерно их участие в сильном взаимодействии. Возникает естественный вопрос: нельзя ли, основываясь на векторах алгебры Клиффорда, построить и волновую функцию кварков? Известно, что попытка использовать уравнение Дирака для описания движения кварков наталкивается на серьезные трудности. Кроме того, мы видим, что ресурс алгебры Клиффорда уже исчерпан лептонами. Отсюда общий вывод: кварки требуют привлечения другой алгебры действия. Об этой алгебре здесь мы скажем лишь несколько общих слов:

1. Концепция общности – стремление рассмотреть оба класса фундаментальных частиц с единых позиций – заставляет нас предположить, что алгебра лептонов, то есть алгебра Клиффорда, и неизвестная алгебра кварков должны допускать нетривиальное объединение. Иначе говоря, они должны представлять собой два частных случая некой единой алгебры.

2. Так как и лептоны и кварки имеют общие свойства – обладают спином и электрическим зарядом, то составляющие вектора действия, ответственные за эти характеристики, должны присутствовать как в алгебре Клиффорда, так и в неизвестной алгебре кварков.

В Лекциях 11, 12, 13 мы остановимся подробнее на алгебре кварков.

VIII. ВЫВОДЫ

- Волновая функция электрона есть вектор алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_3$.
- Волновая функция лептонов одного поколения есть вектор алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_4$.
- Волновые функции лептонов разных поколений отличаются друг от друга циклической перестановкой трех образующих базисных векторов.
- Для описания кварков необходимо найти алгебру действия, отличную от алгебры Клиффорда.