Лекция 9. Уравнения релятивистской квантовой механики для лептонов.

А. А. Кецарис

(6 августа 2004 г.)

В этой Лекции приведено обобщение уравнения Дирака, относящееся к двум лептонам одного поколения. Кроме того, записано уравнение квантовой механики для виртуального лептона. Отдельно рассматривается случай, когда величина действия значительно отличается от постоянной Планка. В конце Лекции сформулировано уравнение квантовой механики по отношению к волновой функции пространства-времени лептона.

I. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей Лекции для удобства изложения мы будем использовать следующие обозначения для индексов. Индексы, обозначаемые большими латинскими буквами A, B, I, K и так далее без цифры внизу принимают значения

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124)\,.$$

Те же индексы, но с цифрой 1 внизу (A_1, B_1, I_1, K_1 и так далее) принимают значения

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123)\,.$$

Те же индексы, но с цифрой 2 внизу (A_2, B_2, I_2, K_2 и так далее) принимают значения

$$(32, 13, 21, 0)\,.$$

Те же индексы, но с цифрой 3 внизу (A_3, B_3, I_3, K_3 и так далее) принимают значения

$$(21, 0)\,.$$

В этих обозначениях

$$C^{IK}{}_L\,, \quad C^L{}_{KI}$$

есть точные структурные матрицы алгебр Клиффорда $^+\mathbb{X}_4$, $\mathbb{S}_4$. Соответственно

$$C^{IK_1}{}_{L_1}\,, \quad C^{L_1}{}_{K_1 I}$$

есть структурные матрицы тех же алгебр в первом сжатом представлении,

$$C^{IK_2}{}_{L_2}\,, \quad C^{L_2}{}_{K_2 I}$$

есть структурные матрицы тех же алгебр во втором сжатом представлении.

$$C^{IK_3}{}_{L_3}\,, \quad C^{L_3}{}_{K_3 I}$$

есть структурные матрицы тех же алгебр в третьем сжатом представлении. Напомним, что первое сжатое представление соответствует теории Дирака, второе – теории Паули, а третье – теории Шредингера. И чем выше сжатие, тем менее точно представлены структурные матрицы.

После указанных замечаний снова перейдем к уравнению Дирака. Оно по прежнему будет для нас основополагающим. В принятых нами обозначениях оно запишется следующим образом

$$\left(C^{iA_1}{}_{B_1}\,\partial_i + \frac{\mathrm{m}_e\,c}{\hbar}\,C^{0A_1}{}_{B_1}\right)\cdot\psi^{B_1} = 0\,.$$

Итак уравнение Дирака использует неточные, соответствующие первому сжатию структурные матрицы. Отсюда возникает естественное стремление переписать уравнение Дирака для точных структурных матриц. Но тогда мы должны перейти от волновой функции ψ^{B_1} к волновой функции ψ^B, имеющей в два раза больше компонент. И дополнительным “лишним” компонентам необходимо дать соответствующую интерпретацию. В Лекции 5 было высказано предположение о том, что можно попытаться “лишние” компоненты волновой функции использовать для описания электронного нейтрино, а всю волновую функцию отнести к двум частицам первого поколения – электрону и электронному нейтрино. Далее мы рассмотрим обобщенное уравнение релятивистской квантовой механики, соответствующее переходу к точным структурным матрицам и вернемся к этому предположению.

II. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Обобщить уравнение Дирака можно было бы формально, записав в нем точные структурные матрицы. Однако, такой подход может привести к ошибке, так как переход от сжатого представления к точному есть переход от частного к общему и может быть не однозначным. Поэтому мы поступим иначе и воспользуемся самыми общими соотношениями, предназначенными для описания квантовых явлений, – квантовыми постулатами. А именно воспользуемся соотношением (19) Лекции 1, записав его в следующем виде

$$\partial_M\psi^L = \frac{1}{\hbar}\,C^L{}_{KI}\cdot p^I{}_M\cdot\psi^K\,. \tag{1}$$

Далее придадим этому соотношению форму уравнения Дирака. Для этого умножим его обе части на структурные константы $C^{MN}{}_L$. Получим

$$
C^{MN}{}_{L}\cdot\partial_M\psi^L(x)=\frac{1}{\hbar}\,C^{MN}{}_{L}\cdot C^{L}{}_{KI}\cdot p^I{}_M\cdot\psi^K\,. \qquad (2)
$$

(Как принято, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.)

С нашей точки зрения это уравнение и есть уравнение релятивистской квантовой механики в самом общем виде. Отталкиваясь от него, будем искать обобщение уравнения Дирака на точные структурные матрицы. Для этого поставим следующий вопрос: при каких условиях уравнение (2) сводится к уравнению Дирака? Во-первых, дифференцирование в левой части уравнения должно выполняться только по координатам образующего пространства и волновая функция должна зависеть от этих координат. Во-вторых, структурные матрицы должны быть записаны в первом сжатом представлении. С учетом этих двух обстоятельств уравнение (2) принимает вид

$$
C^{mN_1}{}_{L_1}\cdot\partial_m\psi^{L_1}(x)=\frac{1}{\hbar}\,C^{MN_1}{}_{L_1}\cdot C^{L_1}{}_{K_1I}\cdot p^I{}_M\cdot\psi^{K_1}\,.
$$

И третье условие выглядит так

$$
C^{MN_1}{}_{L_1}\cdot C^{L_1}{}_{K_1I}\cdot p^I{}_M=-\mathrm{m}\,c\,\delta^{N_1}{}_{K_1}\,.
$$

Это условие может быть выполнено только в одном случае: если структурные матрицы являются символами Кронеккера. Среди матриц $C^{MN_1}{}_{L_1}$ только матрица $C^{0N_1}{}_{L_1}$ удовлетворяет этому условию. Среди матриц $C^{L_1}{}_{K_1I}$ этому условию удовлетворяют две матрицы *

$$
C^{L_1}{}_{K_10}\,,\quad C^{L_1}{}_{K_134}\,.
$$

В результате мы получаем, что третье условие сводится к следующему

$$
p^0{}_0+p^{34}{}_0=-\mathrm{m}\,c\,.
$$

Это соотношение не представляет собой нечто неожиданное. Из СТО следует, что $p^0{}_0=-\mathrm{m}\,c$. (См. Лекции 1 и 8.) Поэтому полученное условие, возможно, есть уточнение СТО. Далее мы будем полагать

$$
p^0{}_0=p^{34}{}_0=-\frac{\mathrm{m}\,c}{2}\,.
$$

Подтверждением этого соотношения будет полученный результат.

На основании приведенных соображений уравнение Дирака можно записать следующим образом

$$
C^{mN_1}{}_{L_1}\cdot\partial_m\psi^{L_1}(x)+\frac{\mathrm{m}\,c}{2\,\hbar}\,(C^{N_1}{}_{K_10}+C^{N_1}{}_{K_134})\cdot\psi^{K_1}=0\,.
$$

И теперь, переходя от приближенных структурных матриц первого сжатия к точным матрицам, получим искомое обобщение уравнения Дирака.

$$
C^{mN}{}_{L}\cdot\partial_m\psi^L(x)+\frac{\mathrm{m}\,c}{2\,\hbar}\,(C^{N}{}_{K0}+C^{N}{}_{K34})\cdot\psi^K=0\,. \qquad (3)
$$

Понятно, что здесь также $C^N{}_{K0}=\delta^N{}_K$ в отличие от $C^N{}_{K34}$.

Для действительного регулярного представления алгебры Клиффорда $\mathbb{S}$ компоненты волновой функции $\psi^K(x)$ представляют собой шестнадцать действительных функций. В комплексном представлении волновая функция содержит восемь комплексных компонент вида:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\psi}^{13}=i\,\psi^{32}+\psi^{13}\,, && \boldsymbol{\psi}^{0}=i\,\psi^{21}+\psi^{0}\,,\\
&\boldsymbol{\psi}^{14}=i\,\psi^{42}+\psi^{14}\,, && \boldsymbol{\psi}^{34}=i\,\psi^{1324}+\psi^{34}\,,\\
&\boldsymbol{\psi}^{2}=i\,\psi^{1}+\psi^{2}\,, && \boldsymbol{\psi}^{123}=i\,\psi^{3}+\psi^{123}\,,\\
&\boldsymbol{\psi}^{234}=i\,\psi^{134}+\psi^{234}\,, && \boldsymbol{\psi}^{124}=i\,\psi^{4}+\psi^{124}\,.
\end{aligned} \qquad (4)
$$

И в кватернионном представлении компонентами волновой функции являются четыре кватерниона вида:

$$
\begin{aligned}
\Psi^{0}&=a\,I\,\psi^{32}+b\,I\,\psi^{13}+i\,\psi^{21}+\psi^{0}\,,\\
\Psi^{34}&=a\,I\,\psi^{42}+b\,I\,\psi^{14}+i\,\psi^{1324}+\psi^{34}\,,\\
\Psi^{123}&=a\,I\,\psi^{1}+b\,I\,\psi^{2}+i\,\psi^{3}+\psi^{123}\,,\\
\Psi^{124}&=a\,I\,\psi^{134}+b\,I\,\psi^{234}+i\,\psi^{4}+\psi^{124}\,.
\end{aligned} \qquad (5)
$$

Приведем уравнения квантовой механики по отношению к кватернионным компонентам:

$$
\left(-i\left[\begin{array}{cc|cc} & & & 1\\ & & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ 1 & & & \end{array}\right]\partial_4+i\left[\begin{array}{cc|cc} & & -\sigma^a & \\ & & & -\sigma^a\\ \hline \sigma^a & & & \\ & \sigma^a & & \end{array}\right]\partial_a+\frac{\mathrm{m}\,c}{2\,\hbar}\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1\\ & & 1 & 1\end{array}\right]\right)\left\|\begin{matrix}\Psi^0\\ \Psi^{34}\\ \Psi^{123}\\ \Psi^{124}\end{matrix}\right\|=0
$$

Или

$$
\begin{aligned}
i\,\partial_4\Psi^{124}+i\,\sigma^a\,\partial_a\Psi^{123}&=\frac{\mathrm{m}\,c}{2\,\hbar}\,(\Psi^0+\Psi^{34})\,,\\
i\,\partial_4\Psi^{123}+i\,\sigma^a\,\partial_a\Psi^{124}&=\frac{\mathrm{m}\,c}{2\,\hbar}\,(\Psi^0+\Psi^{34})\,,\\
i\,\partial_4\Psi^{34}-i\,\sigma^a\,\partial_a\Psi^{0}&=\frac{\mathrm{m}\,c}{2\,\hbar}\,(\Psi^{123}+\Psi^{124})\,,\\
i\,\partial_4\Psi^{0}-i\,\sigma^a\,\partial_a\Psi^{34}&=\frac{\mathrm{m}\,c}{2\,\hbar}\,(\Psi^{123}+\Psi^{124})\,.
\end{aligned} \qquad (6)
$$

Теперь нам необходимо выяснить назначение компонент волновой функции, число которых в два раза больше, чем в теории Дирака. Для этого обратимся к *стандартному* представлению уравнения квантовой механики.

III. СТАНДАРТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ.

1. Стандартное представление уравнения Дирака.

Сначала напомним как записывается уравнение Дирака в стандартном представлении. А затем применим

*См Раздел I Лекции 4.

тот же прием к полученному нами уравнению квантовой механики.

Воспользуемся уравнением Дирака в кватернионном представлении, приведенном в Разделе II Лекции 5:

$$\left(-i \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\ \partial_4 + i \begin{array}{|c|c|}\hline & \text{-}\sigma^a \\ \hline \sigma^a & \\ \hline\end{array}\ \partial_a + \frac{\mathrm{m}_e\, c}{\hbar} \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\right) \begin{vmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{123} \end{vmatrix} = 0$$

Или

$$\begin{aligned} &i\,\partial_4 \Psi^{123} + i\,\sigma^a\,\partial_a \Psi^{123} = \frac{\mathrm{m}\,c}{\hbar}\,\Psi^0\,, \\ &i\,\partial_4 \Psi^0 \quad - i\,\sigma^a\,\partial_a \Psi^0 \quad = \frac{\mathrm{m}\,c}{\hbar}\,\Psi^{123}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Преобразуем эти уравнения следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым, а затем вычтем из первого второе. Получим

$$\begin{aligned} i\,\partial_4 \varphi_1 - i\,\sigma^a\,\partial_a \varphi_2 &= \frac{\mathrm{m}\,c}{\hbar}\,\varphi_1\,, \\ -i\,\partial_4 \varphi_2 + i\,\sigma^a\,\partial_a \varphi_1 &= \frac{\mathrm{m}\,c}{\hbar}\,\varphi_2\,, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{123}$ и $\varphi_2 = \Psi^0 - \Psi^{123}$. Такая запись уравнения Дирака называется стандартным представлением. Оно особенно удобно для перехода к второму сжатому представлению, то есть к теории Паули, когда $\Psi^{123} \to \Psi^0$ и второе уравнение становится тривиальным. Действительно, выполняя замену

$$\Psi \to \Psi \cdot \exp\left(-i\,\frac{\mathrm{m}\,c}{\hbar}\,t\right)\,, \quad \varphi \to \varphi \cdot \exp\left(-i\,\frac{\mathrm{m}\,c}{\hbar}\,t\right)\,,$$

получим

$$\begin{aligned} i\,\partial_4 \varphi_1 - i\,\sigma^a\,\partial_a \varphi_2 &= 0\,, \\ i\,\sigma^a\,\partial_a \varphi_1 &= \frac{2\,\mathrm{m}\,c}{\hbar}\,\varphi_2\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Откуда следует уравнение Паули

$$i\,\partial_4 \varphi_1 + \frac{\hbar}{2\,\mathrm{m}\,c}\,g^{ab}\,\partial^2{}_{ab} \varphi_1 = 0\,.$$

Далее воспользуемся аналогичным приемом для обобщенного уравнения квантовой механики. Полученную форму записи уравнения также будем называть стандартным представлением.

2. Стандартное представление обобщенного уравнения.

Преобразуем уравнения (6) следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым а третье с четвертым. Получим

$$\begin{aligned} i\,\partial_4 \varphi_2 + i\,\sigma^a\,\partial_a \varphi_2 &= \frac{\mathrm{m}\,c}{\hbar}\,\varphi_1\,, \\ i\,\partial_4 \varphi_1 - i\,\sigma^a\,\partial_a \varphi_1 &= \frac{\mathrm{m}\,c}{\hbar}\,\varphi_2\,, \end{aligned} \tag{10}$$

где $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{34}$ и $\varphi_2 = \Psi^{123} + \Psi^{124}$. Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$\begin{aligned} i\,\partial_4 \chi_2 + i\,\sigma^a\,\partial_a \chi_2 &= 0\,, \\ i\,\partial_4 \chi_1 - i\,\sigma^a\,\partial_a \chi_1 &= 0\,, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\chi_1 = \Psi^{123} - \Psi^{124}$ и $\chi_2 = \Psi^0 - \Psi^{34}$. Таким образом, система из четырех уравнений преобразуется в две системы из двух уравнений. Одна из систем представляет уравнение Дирака для частицы с массой, отличной от нуля, а другая представляет уравнение Дирака для частицы с массой, равной нулю. Отсюда вытекает следующая интерпретация компонент волновой функции.

IV. КОМПОНЕНТЫ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ И ЛЕПТОНЫ.

В этом разделе дадим интерпретацию компонентам $\Psi^0 + \Psi^{34}$, $\Psi^{123} + \Psi^{124}$, $\Psi^{123} - \Psi^{124}$, $\Psi^0 - \Psi^{34}$ волновой функции как волновым функциям разных частиц.

Наша интерпретация опирается на следующие соображения:

1. Полученные уравнения релятивистской квантовой механики можно представить в виде двух систем уравнений, каждая из которых относится к двухкомпонентной волновой функции.

2. Независимость указанных двух систем уравнений друг от друга позволяет отнести эти системы уравнений к разным частицам. Причем одна из этих частиц имеет массу, отличную от нуля, а другая имеет массу, равную нулю.

3. При переходе от обобщенных уравнений (6) к уравнениям Дирака, когда составляющие кватернионные компоненты Ψ^{34} и Ψ^{124} приравниваются Ψ^0 и Ψ^{123} соответственно, компонента Ψ^0 переходит в *левую* компоненту волновой функции Дирака, а компонента а Ψ^{123} переходит в *правую* компоненту волновой функции Дирака.

Указанные обстоятельства позволяют представить ситуацию следующим образом. Полученные уравнения релятивистской квантовой механики относятся к двум частицам, волновые функции которых имеют две компоненты. Этими частицами являются лептоны одного поколения. То есть, частицы одной из пар: электрон и его нейтрино $\{e, \nu_e\}$, мюон и его нейтрино $\{\mu, \nu_\mu\}$, τ-лептон и его нейтрино $\{\tau, \nu_\tau\}$. В нашем случае нейтрино рассматривается как двухкомпонентная частица. Однако наблюдается только левое нейтрино. Это обстоятельство можно объяснить тем, что взаимодействия, в которых участвует правое нейтрино, ослаблено в сравнении с левым нейтрино. В одной из следующих лекций будет показано, что такое ослабление имеет место.

Вопрос о том, чем отличаются волновые функции (и уравнения квантовой механики) для частиц каждого из поколений, был рассмотрен в Лекции 5. Напомним, что эти отличия мы связали с особенностями комплексного представления пространства действия $\mathbb{S}_4$. Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{S}_4$ в виде произведения $\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_1$, причем любой из векторов ε_{21}, ε_{13}, ε_{32} может быть выбран в качестве *основного* базисного вектора алгебры $\mathbb{S}_1$ (смотрите раздел III Лекции 5). Первый случай был поставлен в соответствие волновым функциям частиц первого поколения $\{e, \nu_e\}$, второй случай поставлен в соответствие волновым функциям частиц второго поколения $\{\mu, \nu_\mu\}$, третий случай поставлен в соответствие волновым функциям частиц третьего поколения $\{\tau, \nu_\tau\}$. Компоненты волновой функции одной частицы, как принято, будем называть *правой* и *левой*, и обозначать нижним индексом, соответственно R и L.

На основании изложенного установим следующее соответствие между компонентами волновой функции и лептонами. Компоненты волновой функции ψ^A, где A принимает значения

$$32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124,$$

разбиваются на четыре части:

$$\begin{aligned}
&\text{левая компонента электрона}\\
e_L &= \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) + \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34})\,,\\
&\text{правая компонента электрона}\\
e_R &= \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) + \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124})\,,\\
&\text{левая компонента } e\text{-нейтрино}\\
\nu_{eL} &= \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) - \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124})\,,\\
&\text{правая компонента } e\text{-нейтрино}\\
\nu_{eR} &= \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) - \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34})\,.
\end{aligned}$$

Компоненты волновых функций лептонов второго и третьего поколений отличаются от вышеприведенных циклической перестановкой пространственных индексов:

$$\begin{aligned}
\text{для мюона и } \mu\text{-нейтрино} &\quad 3 \to 2\,,\ 2 \to 1\,,\ 1 \to 3\,;\\
\text{для } \tau\text{-лептона и } \tau\text{-нейтрино} &\quad 3 \to 1\,,\ 2 \to 3\,,\ 1 \to 2\,.
\end{aligned}$$

V. УРАВНЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ ВИРТУАЛЬНОГО ЛЕПТОНА

В Разделе IV Лекции 8 мы получили квантовомеханический оператор для виртуального лептона. В первом сжатом представлении он запишется:

$$\hat{p} = \frac{\partial}{\partial x^a}\, C^{aK_1}{}_{L_1} + \frac{\partial}{\partial x^4}\, C^{4K_1}{}_{L_1} + \frac{\partial}{\partial x^{a4}}\, C^{a4K_1}{}_{L_1}\,. \quad (12)$$

Заменяя этим оператором оператор Дирака в уравнении Дирака, получим уравнение релятивистской квантовой механики для виртуального лептона:

$$\Big(C^{4K_1}{}_{L_1}\, \frac{\partial}{\partial x^4} + C^{aK_1}{}_{L_1}\, \frac{\partial}{\partial x^a} + C^{a4K_1}{}_{L_1}\, \frac{\partial}{\partial x^{a4}} + \frac{\mathrm{m}_e\, c}{\hbar}\, C^{0A_1}{}_{B_1}\Big) \cdot \psi^{B_1} = 0\,. \quad (13)$$

Или в кватернионном представлении

$$\left(-i \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\ \frac{\partial}{\partial x^4} + i \begin{array}{|c|c|}\hline & \text{-}\sigma^a \\ \hline \sigma^a & \\ \hline\end{array}\ \frac{\partial}{\partial x^a} + \begin{array}{|c|c|}\hline \sigma^a & \\ \hline & \text{-}\sigma^a \\ \hline\end{array}\ \frac{\partial}{\partial x^{a4}} + \frac{\mathrm{m}_e\, c}{\hbar} \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\right) \begin{vmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{123} \end{vmatrix} = 0$$

Больше пока по поводу этого уравнения нам сказать нечего.

VI. УРАВНЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ВЕКТОРА ДЕЙСТВИЯ

Рассмотренные уравнения релятивистской квантовой механики были выведены, исходя из уравнений структуры (15) Лекции 1 для алгебры векторов действия $\mathbb{S}$. Однако эти уравнения структуры были получены из того условия, что величина действия находится вблизи значения постоянной Планка. Следовательно, уравнения релятивистской квантовой механики также относятся к этому условию. Поэтому уравнение релятивистской квантовой механики для произвольного вектора действия необходимо основывать на более общих уравнениях структуры. Рассмотрим такие уравнения структуры. Мы по прежнему исходим из закона умножения векторов действия

$$S = \frac{1}{\hbar}\, S_1 \circ S_2 \quad (14)$$

и соотношений, вытекающих из частного дифференцирования этого закона

$$d_1 S = \frac{1}{\hbar}\, dS_1 \circ S_2\,, \quad (15)$$

$$d_2 S = \frac{1}{\hbar}\, S_1 \circ dS_2\,. \quad (16)$$

Кроме того нам понадобится закон умножения обратных векторов

$$S^{-1} = (S_2)^{-1} \circ (S_1)^{-1} \cdot \hbar \quad (17)$$

Как и в Лекции 1 рассмотрим второй дифференциал $d_2 d_1 S$. Из (14) для него имеет место

$$d_2 d_1 S = \frac{1}{\hbar}\, dS_1 \circ dS_2\,. \quad (18)$$

Для dS_1 и dS_2 из выражений (15)и (16) получаем

$$dS_2 = \hbar \cdot (S_1)^{-1} \circ d_2 S\,, \qquad dS_1 = \hbar \cdot d_1 S \circ (S_2)^{-1}\,. \tag{19}$$

Используя (19) и (17), для второго дифференциала получим

$$d_2 d_1 S = d_1 S \circ S^{-1} \circ d_2 S\,. \tag{20}$$

Это соотношение и представляет собой уравнение структуры для произвольного вектора действия.

Переходя к координатной записи вектора действия, получим

$$\varepsilon_I \cdot d_2 d_1 S^I = (\varepsilon_L \circ \varepsilon_Q \circ \varepsilon_R)\, d_2 S^R\, (S^{-1})^Q \cdot d_1 S^L\,.$$

Из выражения для произведения базисных векторов

$$\varepsilon_L \circ \varepsilon_Q \circ \varepsilon_R = \varepsilon_I \cdot C^I{}_{LP} \cdot C^P{}_{QR}$$

получим

$$d_2 d_1 S^I = d_2 S^R\, (S^{-1})^Q \cdot d_1 S^L\, (C^P{}_{QR} \cdot C^I{}_{LP})\,.$$

Как и прежде, определяя $d_1 S$ как волновую функцию ψ, получим квантовые уравнения в дифференциалах

$$d_2 \psi^I = (C^I{}_{LP} \cdot C^P{}_{QR})\, d_2 S^R\, (S^{-1})^Q \cdot \psi^L\,,$$

из которых следуют квантовые постулаты

$$\partial_M \psi^I = (C^I{}_{LP} \cdot C^P{}_{QR})\, p^R{}_M\, (S^{-1})^Q \cdot \psi^L\,.$$

Умножая обе части равенства на постоянные структуры $C^{MK}{}_I$ алгебры $\mathbb{D}_x$, получим

$$C^{MK}{}_I \cdot \partial_M \psi^I = C^{MK}{}_I\, (C^I{}_{LP} \cdot C^P{}_{QR})\, p^R{}_M\, (S^{-1})^Q \cdot \psi^L\,. \tag{21}$$

Эти соотношения представляют собой *уравнения релятивистской квантовой механики для произвольного вектора действия.* В том случае, когда уравнения релятивистской квантовой механики рассматриваются вблизи значения вектора действия

$$S^Q = S^0 = \hbar\,, \quad (S^{-1})^Q = (S^{-1})^0 = \frac{1}{\hbar}\,,$$

из (21) получим уравнение (2). В дираковском приближении, когда в левой части $M = m$ и

$$p^R{}_M = p^0{}_0 = -\mathrm{m}\, c\,,$$

имеем

$$C^{mK}{}_I \cdot \partial_m \psi^I + \mathrm{m}\, c\, C^K{}_{LQ} \cdot (S^{-1})^Q \cdot \psi^L = 0\,.$$

VII. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ ЛЕПТОНА.

В Лекции 8 мы показали, что пространство-время лептона является алгеброй. А раз так, то уравнения структуры этой алгебры

$$d_2 d_1 x = \frac{1}{R}\, d_1 x \circ d_2 x\,. \tag{22}$$

представляют собой квантовые постулаты по отношению к волновой функции пространства-времени $\chi = d_1 x$:

$$d\chi = \frac{1}{R}\, \chi \circ dx\,. \tag{23}$$

Это уравнение можно записать для координат волновой функции $\chi^I = d_1 x^I$:

$$d\chi^L = \frac{1}{R}\, {}^+C^L{}_{KI} \cdot dx^I \cdot \chi^K\,. \tag{24}$$

Можно допустить, что координаты пространства-времени лептона являются функциями его действия. Тогда квантовые постулаты приобретают вид:

$$\frac{\partial \chi^L}{\partial S^M} = \frac{1}{R}\, {}^+C^L{}_{KI} \cdot (p^{-1})^I{}_M \cdot \chi^K\,. \tag{25}$$

Запишем это уравнение в форме уравнения Дирака. Для этого умножим обе части уравнения на структурные матрицы алгебры $\mathbb{D}_S$ – ${}^+C^{MK}{}_L$, подразумевая суммирование по индексам M и L. В результате получим *уравнение для волновой функции пространства-времени лептона* в самом общем виде

$${}^+C^{MK}{}_L\, \frac{\partial \chi^L}{\partial S^M} = \frac{1}{R}\, {}^+C^L{}_{KI} \cdot (p^{-1})^I{}_M\, {}^+C^{MK}{}_L \cdot \chi^K\,. \tag{26}$$

Далее рассмотрим частный случай этого уравнения, с нашей точки зрения наиболее естественный.

Вид операторов дифференцирования по координатам действия мы установим на основании следующих соображений. В теории Шредингера вектор действия (по аналогии с волновой функцией) имеет следующие компоненты

$$S = \varepsilon_0\, S^0 + \varepsilon_{21}\, S^{21}$$

Для этого вектора оператор дифференцирования имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S^0}\, \varepsilon^0 + \frac{\partial}{\partial S^{21}}\, \varepsilon^{21}\,.$$

А квантовомеханический оператор выглядит следующим образом

$$\hat{p} = \frac{\partial}{\partial S^0}\, {}^+C^{0K}{}_L + \frac{\partial}{\partial S^{21}}\, {}^+C^{21K}{}_L\,. \tag{27}$$

В теории Паули вектор действия (по аналогии с волновой функцией) имеет следующие компоненты

$$S = \varepsilon_0\, S^0 + \varepsilon_{21}\, S^{21} + \varepsilon_{13}\, S^{13} + \varepsilon_{32}\, S^{32}\,.$$

Для этого вектора оператор дифференцирования имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S^0}\,\varepsilon^0 + \frac{\partial}{\partial S^{21}}\,\varepsilon^{21} + \frac{\partial}{\partial S^{13}}\,\varepsilon^{13} + \frac{\partial}{\partial S^{32}}\,\varepsilon^{32}\,.$$

А квантовомеханический оператор выглядит следующим образом

$$\hat{p} = \frac{\partial}{\partial S^0}\,{}^{+}C^{0K}{}_{L} + \frac{\partial}{\partial S^{21}}\,{}^{+}C^{21K}{}_{L} + \frac{\partial}{\partial S^{13}}\,{}^{+}C^{13K}{}_{L} + \frac{\partial}{\partial S^{32}}\,{}^{+}C^{32K}{}_{L}\,.$$

Теории Дирака соответствует квантовомеханический оператор с 8-ю компонентами. В нашем, наиболее общем случае число компонент квантовомеханического оператора равно 16.

Далее для простоты изложения мы остановимся на операторе, соответствующем теории Паули. Затем мы будем искать влияние действия лептона не на все пространство-время, а только на его геометрическую часть. Кроме того мы будем полагать, что обратный импульс $(p^{-1})^{I}{}_{M}$ имеет только одну компоненту

$$(p^{-1})^{0}{}_{0} = -\frac{1}{\mathrm{m}\,c}\,.$$

С учетом того, что

$$\frac{1}{R\,\mathrm{m}\,c} = \frac{1}{\hbar}\,,$$

получим искомое уравнение

$$\left({}^{+}C^{0K_1}{}_{L_1}\,\frac{\partial}{\partial S^0} + {}^{+}C^{21K_1}{}_{L_1}\,\frac{\partial}{\partial S^{21}} + {}^{+}C^{13K_1}{}_{L_1}\,\frac{\partial}{\partial S^{13}} + {}^{+}C^{32K_1}{}_{L_1}\,\frac{\partial}{\partial S^{32}}\right)\chi^{L_1} + \frac{1}{\hbar}\,\chi^{K_1} = 0\,. \qquad (28)$$

Или в кватернионных компонентах*

$$\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,\frac{\partial}{\partial S^0} - i\,\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,\frac{\partial}{\partial S^{21}} - b\,\begin{array}{|c|c|}\hline I & \\ \hline & I \\ \hline\end{array}\,\frac{\partial}{\partial S^{13}} - a\,\begin{array}{|c|c|}\hline I & \\ \hline & I \\ \hline\end{array}\,\frac{\partial}{\partial S^{32}} + \frac{1}{\hbar}\,\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\right)\begin{vmatrix}\chi^{0}\\ \chi^{123}\end{vmatrix} = 0\,.$$

Это уравнение ждет своего решения.

*Вид структурных матриц рассмотрен в Лекции 7.

VIII. ВЫВОДЫ

1. Волновая функция для алгебры действия $\mathbb{S}$ состоит из четырех кватернионных компонент, две из которых в дираковском приближении переходят в левую, а две другие в правую компоненту волновой функции Дирака. В этом состоит одна из причин, по которой вышеуказанные четыре компоненты интерпретируются как компоненты волновой функции двух частиц, а именно лептонов одного поколения.

2. В комплексном представлении волновой функции лептонов одного поколения ключевую роль играет базисный вектор ε_{21} алгебры Клиффорда. Однако с алгебраической точки зрения базисный вектор ε_{21} равноправен базисным векторам ε_{13} и ε_{32}. Отсюда следует, что отмеченные базисные векторы должны быть поставлены в соответствие трем поколениям лептонов. Это соображение позволяет записать квантовые уравнения для лептонов трех поколений.

3. Уравнение квантовой механики для виртуального лептона помимо оператора Дирака включает оператор силы.

4. Уравнения квантовой механики как известные так и приведенные в настоящей работе относятся к значениям вектора действия, близким к значению постоянной Планка. В общем случае необходимо пользоваться уравнениями (21).

5. Так как пространство–время лептона является алгеброй, то имеет место уравнение квантовой механики для волновой функции пространства–времени. В силу симметрии между пространством действия $\mathbb{S}$ и пространством–временем $\mathbb{X}$ можно допустить, что волновая функция пространства–времени зависит от координат вектора действия.