Лекция 11. На пути к алгебре кварков

А. А. Кецарис
(23 января 2005 г.)

В этой Лекции мы ищем способы обобщения алгебры Клиффорда в надежде получить алгебру кварков. Наиболее простое решение – отказ от антикоммутативности умножения. Этот путь приводит к алгебре, которой мы ставим в соответствие гипотетические фундаментальные частицы, названные нами *лептино*.

I. ВВЕДЕНИЕ.

В предыдущих Лекциях мы установили, что в основе описания лептонов лежит алгебра Клиффорда. Однако, помимо лептонов существуют другие фундаментальные частицы – *кварки*. Для этого класса частиц характерно участие в сильном взаимодействии. Возникает естественный вопрос: нельзя ли, основываясь на векторах алгебры Клиффорда, построить волновую функцию кварков и объяснить их свойства? В Лекции 5 мы выдвинули тезис, согласно которому кварки требуют привлечения иных алгебр действия и пространства-времени, отличных от алгебры Клиффорда. При этом мы основывались на двух обстоятельствах: во-первых, попытка использовать уравнение Дирака для описания движения кварков наталкивается на серьезные трудности, во-вторых, ресурс алгебры Клиффорда уже исчерпан лептонами. При поиске алгебры кварков мы будем исходить из следующих принципиальных положений.

1. Так как и лептоны и кварки имеют общие свойства – обладают спином и электрическим зарядом, – то составляющие вектора действия, ответственные за эти характеристики, должны присутствовать и в алгебре Клиффорда, и в искомой алгебре кварков.

2. С помощью алгебры кварков мы должны объяснить характеристики кварков, отсутствующие у лептонов (дробность электрического заряда, гиперзаряд, цвет, барионное число, алгебру $su(3)$). Для этого мы должны отказаться от некоторых свойств алгебры Клиффорда, заменив их на другие свойства.

3. Вместе с тем лептоны и кварки составляют, по нашим представлениям, единый объект – фундаментальные частицы. Поэтому алгебра лептонов и алгебра кварков должны быть двумя частными разновидностями одной алгебры, которую мы назовем *универсальной* или *алгеброй фундаментальных частиц*. Это условие есть своего рода условие единства материи.

1. Как описывать фундаментальные частицы, отличные от лептонов.

Итак перед нами стоит двойная задача: отказ от некоторых свойств алгебры Клиффорда и поиск обобщения алгебры Клиффорда. Например, мы могли бы отказаться от условия ассоциативности алгебры и рассмотреть неассоциативную алгебру, но тогда пришлось бы отказаться от матричного представления базисных векторов в принятом виде. А как было показано в Лекции 8 это представление является ключевым при построении квантового оператора дифференцирования. Отсюда следует общий вывод: слишком радикальные обобщения делают задачу поиска алгебры кварков неопределенной.

В своем обобщении мы пойдем, как нам кажется, наименее радикальным путем. При этом большая часть признаков, присущих алгебре Клиффорда, будет сохранена. Напомним, что вектор алгебры Клиффорда (алгебры действия лептона) может быть записан следующим образом

$$\psi = \varepsilon_0\,\psi^0 + \varepsilon_i\,\psi^i + \varepsilon_{ij}\,\psi^{ij} + \varepsilon_{ijk}\,\psi^{ijk} + \varepsilon_{1324}\,\psi^{1324}\,.$$

Аналогично вектор алгебры пространства-времени лептона имеет вид*

$$x = \mathcal{E}_0\,x^0 + \mathcal{E}_i\,x^i + \mathcal{E}_{ij}\,x^{ij} + \mathcal{E}_{ijk}\,x^{ijk} + \mathcal{E}_{1324}\,x^{1324}\,.$$

То есть, вектор алгебры Клиффорда включает в себя следующие слагаемые

1. скалярную часть
$$\varepsilon_0\,\psi^0\,;$$

2. вектор образующего пространства
$$\varepsilon_i\,\psi^i\,;$$
в релятивистском случае (для $\mathbb{C}_4$) образующее пространство есть пространство-время СТО; в нерелятивистском случае (для $\mathbb{C}_3$) образующее пространство есть 3-х мерное геометрическое пространство;

---

*Смотрите формулу (3) Лекции 8.

3. антисимметричный тензор 2-го ранга над образующим пространством

$$\varepsilon_{ij}\,\psi^{ij}\,;$$

4. антисимметричный тензор 3-го ранга над образующим пространством

$$\varepsilon_{ijk}\,\psi^{ijk}\,;$$

5. антисимметричный тензор 4-го ранга над образующим пространством (для релятивистского случая)

$$\varepsilon_{1324}\,\psi^{1324}\,.$$

Сохраним представление об образующем пространстве, о скалярном произведении векторов и скалярной части вектора алгебры. Также будем полагать, что слагаемыми вектора искомой алгебры являются вектор образующего пространства и тензоры 2-го, 3-го, 4-го рангов над образующим пространством. Мы откажемся лишь от условия, что указанные тензоры являются антисимметричными. Нужно иметь в виду, что антисимметричные тензоры появляются в алгебре Клиффорда вследствие антикоммутативности умножения образующих базисных векторов

$$\varepsilon_k \circ \varepsilon_i = -\varepsilon_i \circ \varepsilon_k \qquad i \neq k\,.$$

Поэтому в основе нашего поиска алгебры кварков будет лежать отказ от указанного условия антикоммутативности.

В качестве первого шага в этом направлении рассмотрим наиболее простой случай. Рассмотрим алгебру, в которой условие антикоммутативности заменено на условие коммутативности. Эту, вновь вводимую алгебру назовем *коммутативной* и обозначим ее $\mathbb{C}^*$. В предыдущих Лекциях было показано, что алгебра Клиффорда, в которой при формировании вектора используются антисимметричные тензоры, находится в соответствии с фундаментальными частицами определенного типа – лептонами. Вместе с тем с общей, можно сказать философской, точки зрения трудно понять почему природа, создавая фундаментальные частицы, использовала только антисимметричные тензоры. Соображения такого рода наталкивают нас на мысль о том, что коммутативной алгебре $\mathbb{C}^*$ также соответствуют фундаментальные частицы. В свое время[*] они были названы нами *лептино.* Алгебру $\mathbb{C}^*$ будем называть также алгеброй лептино. Далее рассмотрим алгебру лептино, свойства этих частиц, вытекающие из свойств алгебры $\mathbb{C}^*$ и попытаемся ответить на вопрос: не являются ли лептино кварками?

---

[*]См. А. А. Кецарис. *Основания математической физики*, М., 1997, Ассоциация независимых издателей.

II. АЛГЕБРА ЛЕПТИНО

Итак, коммутативная алгебра $\mathbb{C}^*$ есть алгебра действия и алгебра пространства-времени гипотетических фундаментальных частиц – лептино. Укажем базисные векторы коммутативной алгебры и правила умножения, которым они подчиняются.

- κ_0 – базисный вектор скалярной части векторов. Этот базисный вектор ничем не отличается от соответствующего вектора ε_0 алгебры $\mathbb{C}$. Однако мы используем другое обозначение для того, чтобы подчеркнуть принадлежность этого вектора другой алгебре. Для κ_0 имеет место правило умножения

$$\kappa_0 \circ \kappa_0 = \kappa_0\,.$$

- Образующие векторы κ_i, где индекс i пробегает значения от 1 до 4. Нужно иметь в виду, что образующее пространство для алгебр $\mathbb{C}^*$ и $\mathbb{C}$ одинаково. Поэтому векторы κ_i совпадают с векторами ε_i. Число векторов κ_i равно четырем. Для них имеют место правила умножения

$$\kappa_i \circ \kappa_0 = \kappa_0 \circ \kappa_i = \kappa_i\,.$$

$$\kappa_i \circ \kappa_i = \operatorname{sign}\kappa_i\,,$$

где

$$\operatorname{sign}\kappa_1 = \operatorname{sign}\kappa_2 = \operatorname{sign}\kappa_3 = -\operatorname{sign}\kappa_4 = \kappa_0\,.$$

- Векторы

$$\kappa_{ik} = \kappa_k \circ \kappa_i\,.$$

Здесь $i \neq k$. Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6\,.$$

Для этих векторов выполняется правило перестановки индексов и, соответственно, сомножителей – условие коммутативности

$$\kappa_{ik} = \kappa_{ki}\,.$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условий ассоциативности и коммутативности. В частности,

$$\kappa_{ik} \circ \kappa_{ik} = \kappa_i \circ (\kappa_k \circ \kappa_k) \circ \kappa_i = \operatorname{sign}\kappa_i \circ \operatorname{sign}\kappa_k\,.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} &\kappa_{21} \circ \kappa_{21} = \kappa_0\,, &\quad &\kappa_{42} \circ \kappa_{42} = -\kappa_0\,,\\ &\kappa_{32} \circ \kappa_{32} = \kappa_0\,, & &\kappa_{14} \circ \kappa_{14} = -\kappa_0\,,\\ &\kappa_{13} \circ \kappa_{13} = \kappa_0\,, & &\kappa_{34} \circ \kappa_{34} = -\kappa_0\,. \end{aligned}$$

- Векторы
$$\kappa_{ikl} = \kappa_l \circ \kappa_k \circ \kappa_i \,.$$
Здесь
$$i \neq k \,, i \neq l \,, k \neq l \,.$$
Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три
$$C_4^3 = 4 \,.$$
Очевидно, что при перестановке индексов в виду коммутативности сомножителей знак не меняется:
$$\kappa_{ikl} = \kappa_{kli} = \kappa_{lik} = \kappa_{kil} = \kappa_{ilk} = \kappa_{lki} \,.$$
Из указанных законов также следует
$$\kappa_{ikl} \circ \kappa_{ikl} = \kappa_i \circ (\kappa_k \circ (\kappa_l \circ \kappa_l) \circ \kappa_k) \circ \kappa_i = \operatorname{sign} \kappa_i \circ \operatorname{sign} \kappa_k \circ \operatorname{sign} \kappa_l \,.$$
Откуда
$$\kappa_{123} \circ \kappa_{123} = \kappa_0 \,, \qquad \kappa_{124} \circ \kappa_{124} = -\kappa_0 \,,$$
$$\kappa_{134} \circ \kappa_{134} = -\kappa_0 \,, \qquad \kappa_{234} \circ \kappa_{234} = -\kappa_0 \,.$$

- Вектор
$$\kappa_{iklm} = \kappa_m \circ \kappa_l \circ \kappa_k \circ \kappa_i \,.$$
Здесь
$$i \neq k \,, i \neq l \,, i \neq m \,, k \neq l \,, k \neq m \,, l \neq m \,.$$
Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по четыре, то есть единице
$$C_4^4 = 1 \,.$$
Этот вектор подчиняются следующим правилам перестановки индексов:
$$\begin{aligned}
\kappa_{iklm} = \kappa_{ilmk} = \kappa_{imkl} = \kappa_{ilkm} = \\
\kappa_{ikml} = \kappa_{imlk} = \kappa_{klmi} = \kappa_{kmil} = \\
\kappa_{kilm} = \kappa_{kmli} = \kappa_{klim} = \kappa_{kiml} = \\
\kappa_{lmik} = \kappa_{likm} = \kappa_{lkmi} = \kappa_{limk} = \\
\kappa_{lmki} = \kappa_{lkim} = \kappa_{mikl} = \kappa_{mkli} = \\
\kappa_{mlik} = \kappa_{mkil} = \kappa_{milk} = \kappa_{mlki} \,.
\end{aligned}$$
Кроме того
$$\kappa_{iklm} \circ \kappa_{iklm} = \kappa_i \circ (\kappa_k \circ (\kappa_l \circ (\kappa_m \circ \kappa_m) \circ \kappa_l) \circ \kappa_k) \circ \kappa_i = \operatorname{sign} \kappa_i \circ \operatorname{sign} \kappa_k \circ \operatorname{sign} \kappa_l \circ \operatorname{sign} \kappa_m \,.$$
Откуда
$$\kappa_{1324} \circ \kappa_{1324} = -\kappa_0 \,.$$

Как обычно в случае, когда необходимо подчеркнуть размерность образующего пространства коммутативной алгебры, будем использовать обозначение $\mathbb{C}_4^*$ вместо обозначения $\mathbb{C}^*$. Это особенно полезно при выделении подалгебры. Так подалгебру с тремя образующими базисными векторами (например, κ_1, κ_2, κ_3), удобно обозначать $\mathbb{C}_3^*$.

1. Деление в алгебре $\mathbb{C}^*$

В алгебре $\mathbb{C}^*$ определено деление. Рассмотрим вычисление обратного вектора на примере алгебры $\mathbb{C}_2^*$, построенной на базисных векторах κ_0, κ_1, κ_2, κ_{21}. Для вектора
$$x = \kappa_0 \, x^0 + \kappa_1 \, x^1 + \kappa_2 \, x^2 + \kappa_{21} \, x^{21}$$
определим обратный вектор
$$x^{-1} = \kappa_0 \, (x^{-1})^0 + \kappa_1 \, (x^{-1})^1 + \kappa_2 \, (x^{-1})^2 + \kappa_{21} \, (x^{-1})^{21}$$
из условия
$$x \circ x^{-1} = \kappa_0 \,.$$
Сделаем это в два этапа. Сначала определим вектор
$$x' = \kappa_0 \, (x')^0 + \kappa_1 \, (x')^1 + \kappa_2 \, (x')^2 + \kappa_{21} \, (x')^{21}$$
из условия
$$x \circ x' \subset \mathbb{K} \,.$$
В левой части этого выражения имеем вектор
$$\begin{aligned}
&\kappa_0 \, x^0 \, (x')^0 + \kappa_1 \, x^0 \, (x')^1 + \kappa_2 \, x^0 \, (x')^2 + \kappa_{21} \, x^0 \, (x')^{21} \\
&+\kappa_1 \, x^1 \, (x')^0 + \kappa_0 \, x^1 \, (x')^1 + \kappa_{21} \, x^1 \, (x')^2 + \kappa_2 \, x^1 \, (x')^{21} \\
&+\kappa_2 \, x^2 \, (x')^0 + \kappa_{21} \, x^2 \, (x')^1 + \kappa_0 \, x^2 \, (x')^2 + \kappa_1 \, x^1 \, (x')^{21} \\
&+\kappa_{21} \, x^{21} \, (x')^0 + \kappa_2 \, x^{21} \, (x')^1 + \kappa_1 \, x^{21} \, (x')^2 + \kappa_0 \, x^{21} \, (x')^{21} \,.
\end{aligned}$$
Принятое условие равносильно решению системы уравнений
$$\begin{aligned}
x^0 \, (x')^1 + x^1 \, (x')^0 + x^{21} \, (x')^2 + x^1 \, (x')^{21} = 0 \\
x^{21} \, (x')^1 + x^2 \, (x')^0 + x^0 \, (x')^2 + x^1 \, (x')^{21} = 0 \\
x^2 \, (x')^1 + x^{21} \, (x')^0 + x^1 \, (x')^2 + x^0 \, (x')^{21} = 0
\end{aligned}$$
Так как число уравнений меньше числа неизвестных, то можно положить $(x')^0 = x^0$. В результате получим
$$(x')^1 = -x^1 \, \frac{(x^0)^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^{21})^2 - \frac{2 \, x^0 \, x^2 \, x^{21}}{x^1}}{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^{21})^2 + \frac{2 \, x^1 \, x^2 \, x^{21}}{x^0}} \,,$$
$$(x')^2 = -x^2 \, \frac{(x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^{21})^2 - \frac{2 \, x^0 \, x^1 \, x^{21}}{x^2}}{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^{21})^2 + \frac{2 \, x^1 \, x^2 \, x^{21}}{x^0}} \,,$$
$$(x')^{21} = -x^{21} \, \frac{(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^{21})^2 - \frac{2 \, x^0 \, x^1 \, x^2}{x^{21}}}{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^{21})^2 + \frac{2 \, x^1 \, x^2 \, x^{21}}{x^0}} \,,$$
И для обратного вектора имеем
$$x^{-1} = \frac{\kappa_0 \, x^0 + \kappa_1 \, (x')^1 + \kappa_2 \, (x')^2 + \kappa_{21} \, (x')^{21}}{(x^0)^2 + x^1 \, (x')^1 + x^2 \, (x')^2 + x^{21} \, (x')^{21}} \,.$$

III. НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЛЕПТИНО

Нерелятивистские лептино описываются коммутативной алгеброй $\mathbb{C}_3^*$, образующим пространством которой является геометрическое пространство, а времениподобная координата отсутствует. Далее рассмотрим вычисление структурных матриц коммутативной алгебры $\mathbb{C}_3^*$. При этом мы будем пользоваться опытом, полученным при выводе матриц Дирака. А именно:

1. Компоненты векторов и матриц для алгебры $\mathbb{C}_3^*$ необходимо рассматривать в следующей последовательности индексов

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123)\,.$$

2. Переход от действительного представления к компактным представлениям осуществляется путем введения соответствующих блочных матриц.

Пользуясь правилами умножения векторов в алгебре $\mathbb{C}_3^*$, мы должны найти структурные матрицы этой алгебры. Затем, анализируя свойства этих матриц, сделать заключение относительно свойств лептино.

1. Структурные матрицы коммутативной алгебры $\mathbb{C}_3^*$

Далее будем отталкиваться от Раздела 5 Лекции 7. Для алгебры Клиффорда вследствие антикоммутативности умножения целесообразно ввести два умножения – правое и левое. Разновидность алгебры Клиффорда, связанная с правым умножением, рассматривалась нами как алгебра действия. К качестве алгебры пространства-времени выступала алгебра Клиффорда с левым умножением*. Иными словами, для лептонов динамические параметры пространства-времени и действия существенно различны.

В отличие от алгебры Клиффорда в коммутативной алгебре $\mathbb{C}^*$ правое и левое умножения идентичны. Поэтому законы умножения

$$\kappa_K \circ \kappa_I = \kappa_L \cdot C^L{}_{KI}\,. \tag{1}$$

и

$$\kappa_I \circ \kappa_K = \kappa_L \cdot {}^+C^L{}_{KI}\,. \tag{2}$$

эквивалентны, а

$$C^L{}_{KI} = {}^+C^L{}_{KI}\,.$$

Т.е. контравариантная коммутативная алгебра $\mathbb{C}^*$ является как алгеброй действия, так и алгеброй пространства-времени лептино. Для лептино динамические параметры пространства-времени и действия совпадают с точностью до постоянного множителя.

При описании *антилептино* необходимо перейти от контравариантной коммутативной алгебры $\mathbb{C}^*$ к ковариантной коммутативной алгебре ${}^+\mathbb{C}^*$. Эта алгебра является также сопряженной по отношению к контравариантной коммутативной алгебре. † Обозначим базисные векторы алгебры ${}^+\mathbb{C}^*$ через κ^I. Тогда закон умножения в сопряженной коммутативной алгебре либо

$$\kappa^K \circ \kappa^I = {}^+C^{IK}{}_L\, \kappa^L\,. \tag{3}$$

либо

$$\kappa^I \circ \kappa^K = C^{IK}{}_L\, \kappa^L\,. \tag{4}$$

Оба закона эквивалентны, так как в силу коммутативности умножения

$${}^+C^{IK}{}_L = C^{IK}{}_L\,.$$

Поскольку для нерелятивистской коммутативной алгебры

$$g^{IK} = \delta^{IK}\,,$$

структурные матрицы $C^L{}_{KI}$ коммутативной алгебры $\mathbb{C}_3^*$ и структурные матрицы $C^{IK}{}_L$ сопряженной коммутативной алгебры ${}^+\mathbb{C}_3^*$ совпадают‡. Отсюда следует, что в нерелятивистском приближении лептино и антилептино это одна и та же частица. А отсюда в свою очередь следует, что лептино не могут быть отождествлены с кварками. Далее рассмотрим структурные матрицы, которыми представляются базисные векторы коммутативной алгебры $\mathbb{C}^*$:

$$\kappa_I \sim C^L{}_{KI}\,.$$

Номер структурной матрицы I есть индекс базисного вектора, который может быть представлен этой матрицей.

Из (1) следует алгоритм вычисления структурных матриц, соответствующих базисным векторам. Сначала нужно установить номер структурной матрицы (I) в соответствии с номером базисного вектора, затем для каждого столбца матрицы (K) проделать следующие вычисления. Базисный вектор κ_K, номер которого совпадает с номером *столбца* матрицы, нужно

*См. Раздел 7 Лекции 8.

†Обозначение ковариантной (сопряженной) коммутативной алгебры ${}^+\mathbb{C}^*$ выполнено по аналогии с соответствующим обозначением для алгебры Клиффорда.

‡См. Раздел 7 Лекции 8.

умножить *справа* на базисный вектор κ_I, номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор κ_L, на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер (L) указанного базисного вектора определит номер строки, на пересечении которой с рассматриваемым столбцом, необходимо поставить указанное численное значение проекции.

Теперь вычислим структурные матрицы ${C^L}_{KI}$ алгебры $\mathbb{C}_3^*$ по приведенному алгоритму для принятого ранее порядка индексов.

При преобразовании матриц ${C^L}_{KI}$ от действительного представления к a-представлению использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$\mathit{1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \qquad a = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\,.$$

При преобразовании матриц ${C^L}_{KI}$ от a-представления к A-представлению использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$\mathbb{1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \qquad A = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\,.$$

$$\kappa_0 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & 1 & & & & & & & \\
13 & & 1 & & & & & & \\
21 & & & 1 & & & & & \\
0 & & & & 1 & & & & \\ \hline
1 & & & & & 1 & & & \\
2 & & & & & & 1 & & \\
3 & & & & & & & 1 & \\
123 & & & & & & & & 1 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}\, \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
1 & & & & 13 \\
 & 1 & & & 0 \\ \hline
 & & 1 & & 2 \\
 & & & 1 & 123 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}\, \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
\mathbb{1} & & 0 \\ \hline
 & \mathbb{1} & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\kappa_1 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & & & & & 1 \\
13 & & & & & & & 1 & \\
21 & & & & & & 1 & & \\
0 & & & & & 1 & & & \\ \hline
1 & & & & 1 & & & & \\
2 & & & 1 & & & & & \\
3 & & 1 & & & & & & \\
123 & 1 & & & & & & & \\ \hline
\end{array}
= a\, \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & & 1 & 13 \\
 & & 1 & & 0 \\ \hline
 & 1 & & & 2 \\
1 & & & & 123 \\ \hline
\end{array}
= a\, \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & A & 0 \\ \hline
A & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\kappa_2 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & & & & 1 & \\
13 & & & & & & & & 1 \\
21 & & & & & 1 & & & \\
0 & & & & & & 1 & & \\ \hline
1 & & & 1 & & & & & \\
2 & & & & 1 & & & & \\
3 & 1 & & & & & & & \\
123 & & 1 & & & & & & \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}\, \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & & 1 & 13 \\
 & & 1 & & 0 \\ \hline
 & 1 & & & 2 \\
1 & & & & 123 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}\, \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & A & 0 \\ \hline
A & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\kappa_3 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & & & 1 & & \\
13 & & & & & 1 & & & \\
21 & & & & & & & & 1 \\
0 & & & & & & & 1 & \\ \hline
1 & & 1 & & & & & & \\
2 & 1 & & & & & & & \\
3 & & & & 1 & & & & \\
123 & & & 1 & & & & & \\ \hline
\end{array}
= a\, \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & 1 & & 13 \\
 & & & 1 & 0 \\ \hline
1 & & & & 2 \\
 & 1 & & & 123 \\ \hline
\end{array}
= a\, \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & \mathbb{1} & 0 \\ \hline
\mathbb{1} & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\kappa_{21} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
52 & & 1 & & & & & & \\
13 & 1 & & & & & & & \\
21 & & & & 1 & & & & \\
0 & & & 1 & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & 1 & & \\
2 & & & & & 1 & & & \\
3 & & & & & & & & 1 \\
123 & & & & & & & 1 & \\ \hline
\end{array}
= a\, \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
1 & & & & 13 \\
 & 1 & & & 0 \\ \hline
 & & 1 & & 2 \\
 & & & 1 & 123 \\ \hline
\end{array}
= a\, \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
\mathbb{1} & & 0 \\ \hline
 & \mathbb{1} & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\kappa_{13} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & 1 & & & & & \\
13 & & & & 1 & & & & \\
21 & 1 & & & & & & & \\
0 & & 1 & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & 1 & \\
2 & & & & & & & & 1 \\
3 & & & & & 1 & & & \\
123 & & & & & & 1 & & \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}\, \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & 1 & & & 13 \\
1 & & & & 0 \\ \hline
 & & & 1 & 2 \\
 & & 1 & & 123 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}\, \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
A & & 0 \\ \hline
 & A & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\kappa_{32} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & 1 & & & & \\
13 & & & 1 & & & & & \\
21 & & 1 & & & & & & \\
0 & 1 & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & 1 \\
2 & & & & & & & 1 & \\
3 & & & & & & 1 & & \\
123 & & & & & 1 & & & \\ \hline
\end{array}
= a\, \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & 1 & & & 13 \\
1 & & & & 0 \\ \hline
 & & & 1 & 2 \\
 & & 1 & & 123 \\ \hline
\end{array}
= a\, \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
A & & 0 \\ \hline
 & A & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\kappa_{123} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & & 1 & & & \\
13 & & & & & & 1 & & \\
21 & & & & & & & 1 & \\
0 & & & & & & & & 1 \\ \hline
1 & 1 & & & & & & & \\
2 & & 1 & & & & & & \\
3 & & & 1 & & & & & \\
123 & & & & 1 & & & & \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}\, \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & 1 & & 13 \\
 & & & 1 & 0 \\ \hline
1 & & & & 2 \\
 & 1 & & & 123 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}\, \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & \mathbb{1} & 0 \\ \hline
\mathbb{1} & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

В Лекции 3 аналогичным способом были выведены матрицы Дирака.

2. Действительное представление коммутативной алгебры $\mathbb{C}_3^*$

Действительное представление соответствует записи вектора ψ в следующем виде

$$\psi = \kappa_{32}\,\psi^{32} + \kappa_{13}\,\psi^{13} + \kappa_{21}\,\psi^{21} + \kappa_0\,\psi^0 + \kappa_1\,\psi^1 + \kappa_2\,\psi^2 + \kappa_3\,\psi^3 + \kappa_{123}\,\psi^{123}\,.$$

В результате получим действительные структурные матрицы 8×8 представления базисных векторов κ_K. (См. Раздел III 1). Помимо действительного представления будем использовать a-представление и A-представление базисных векторов коммутативной алгебры, удобные в силу своей компактности.

3. a-представление коммутативной алгебры $\mathbb{C}_3^*$

a-представление основано на следующем разложении вектора:

$$\psi = \kappa_{13} \circ (\kappa_{21}\, \psi^{32} + \kappa_0\, \psi^{13}) + \kappa_0 \circ (\kappa_{21}\, \psi^{21} + \kappa_0\, \psi^0) + \kappa_2 \circ (\kappa_{21}\, \psi^1 + \kappa_0\, \psi^2) + \kappa_{123} \circ (\kappa_{21}\, \psi^3 + \kappa_0\, \psi^{123})\,.$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{C}_3^*$ в виде произведения $\mathbb{C}_2^* \times \mathbb{C}_1^*$ (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_2^*$ являются

$$\kappa_{13}\,, \quad \kappa_0\,, \quad \kappa_2\,, \quad \kappa_{123}\,;$$

базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_1^*$ являются

$$\kappa_{21}\,, \quad \kappa_0\,.$$

Пространство $\mathbb{C}_1^*$ можно рассматривать как пространство a-чисел. Для этого базисному вектору κ_{21} алгебры $\mathbb{C}_1^*$ поставим в соответствие a-единицу, имея в виду, что $\operatorname{sign} \kappa_{21} = 1$, а базисному вектору κ_0 алгебры $\mathbb{C}_1^*$ поставим в соответствие действительную единицу

$$\kappa_{21} \sim a\,, \quad \kappa_0 \sim 1\,.$$

В результате получим вектор алгебры $\mathbb{C}_3^*$ в a-представлении

$$\psi \;=\; \kappa_{13} \circ (a\, \psi^{32} + \psi^{13}) + \kappa_0 \circ (a\, \psi^{21} + \psi^0) + \kappa_2 \circ (a\, \psi^1 + \psi^2) + \kappa_{123} \circ (a\, \psi^3 + \psi^{123})\,. \qquad (5)$$

Таким образом, в a-представлении координаты (компоненты) вектора являются гиперчислами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}^{13} &= a\, \psi^{32} + \psi^{13}\,, & \boldsymbol{\psi}^0 &= a\, \psi^{21} + \psi^0\,,\\ \boldsymbol{\psi}^2 &= a\, \psi^1 + \psi^2\,, & \boldsymbol{\psi}^{123} &= a\, \psi^3 + \psi^{123}\,. \end{aligned} \qquad (6)$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$\psi = \kappa_{13}\, \boldsymbol{\psi}^{13} + \kappa_0\, \boldsymbol{\psi}^0 + \kappa_2\, \boldsymbol{\psi}^2 + \kappa_{123}\, \boldsymbol{\psi}^{123}\,. \qquad (7)$$

Отсюда видно, что в a-представлении вектор ψ проецируется на направления κ_{13}, κ_0, κ_2, κ_{123}.

a-представление базисных векторов дается структурными матрицами 4×4 (см. Раздел III 1). Назовем базисный вектор κ_{21} *основным* в связи с тем положением, которое он занимает в a-представлении. С алгебраической точки зрения направления κ_{13} и κ_{32} эквивалентны направлению κ_{21} и также могут быть приняты за основное. Для того, чтобы отличить эти случаи от предыдущего, будем обозначать a-единицу через b, если за основное направление принят вектор κ_{13}, и обозначать a-единицу через c, если за основное направление принят вектор κ_{32}. Указанное выделение базисных векторов, участвующих в a-представлении, показывает, что существует три поколения фундаментальных частиц лептино. (См. Лекцию 5.)

4. A-представление коммутативной алгебры $\mathbb{C}_3^*$

A-представление подалгебры $\mathbb{C}_3^*$ основано на разложении вектора:

$$\psi = (\kappa_{32}\, \psi^{32} + \kappa_{13}\, \psi^{13} + \kappa_{21}\, \psi^{21} + \kappa_0\, \psi^0) \circ \kappa_0 + (\kappa_{32}\, \psi^1 + \kappa_{13}\, \psi^2 + \kappa_{21}\, \psi^3 + \kappa_0\, \psi^{123}) \circ \kappa_{123}\,.$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{C}_3^*$ в виде произведения $\mathbb{C}_1^* \times \mathbb{C}_2^*$. Базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_1^*$ являются

$$\kappa_0\,, \quad \kappa_{123}\,;$$

базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_2^*$ являются

$$\kappa_{32}\,, \quad \kappa_{13}\,, \quad \kappa_{21}\,, \quad \kappa_0\,.$$

$$\operatorname{sign} \kappa_{32} = \operatorname{sign} \kappa_{13} = \operatorname{sign} \kappa_{21} = 1\,, \quad \operatorname{sign} \kappa_0 = 1\,.$$

Последнюю алгебру мы назовем A-алгеброй. Эта алгебра аналогична алгебре кватернионов. Для базисных векторов используем следующие обозначения

$$a \cdot A\,, \quad 1 \cdot A\,, \quad a \cdot \mathbb{1}\,, \quad 1 \cdot \mathbb{1}\,.$$

Заменим базисные векторы κ_{32}, κ_{13}, κ_{21}, κ_0 гиперчислами в соответствии

$$\begin{aligned} \kappa_{32} &\sim a\, A\,,\\ \kappa_{13} &\sim 1\, A\,,\\ \kappa_{21} &\sim a\, \mathbb{1}\,,\\ \kappa_0 &\sim 1\, \mathbb{1}\,. \end{aligned}$$

Получим вектор алгебры $\mathbb{C}_3^*$ в A-представлении

$$\psi = (a\, A\, \psi^{32} + 1\, A\, \psi^{13} + a\, \mathbb{1}\, \psi^{21} + 1\, \mathbb{1}\, \psi^0) \circ \kappa_0 + (a\, A\, \psi^1 + 1\, A\, \psi^2 + a\, \mathbb{1}\, \psi^3 + 1\, \mathbb{1}\, \psi^{123}) \circ \kappa_{123}\,.$$

Таким образом, в A-представлении координаты (компоненты) вектора являются гиперчислами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= a\, A\, \psi^{32} + 1\, A\, \psi^{13} + a\, \mathbb{1}\, \psi^{21} + 1\, \mathbb{1}\, \psi^0\,,\\ \Psi^{123} &= a\, A\, \psi^1 + 1\, A\, \psi^2 + a\, \mathbb{1}\, \psi^3 + 1\, \mathbb{1}\, \psi^{123}\,. \end{aligned} \qquad (8)$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$\psi = \Psi^0\, \kappa_0 + \Psi^{123}\, \kappa_{123}\,.$$

Отсюда видно, что в A-представлении вектор ψ проецируется на направления κ_0, κ_{123}.

A-представление базисных векторов дается структурными матрицами 2×2 (см. Раздел III 1).

5. Физический смысл коммутативности умножения

В этом Разделе мы покажем, что коммутативность умножения в алгебре $\mathbb{C}^*$ инициируется определенным движением в образующем пространстве. Однако, прежде, чем рассмотреть коммутативную алгебру $\mathbb{C}^*$, мы обратимся к алгебре Клиффорда $\mathbb{C}$ и попытаемся выяснить смысл антикоммутативности умножения в этой алгебре, а затем приведем аналогичные соображения для коммутативной алгебры $\mathbb{C}^*$.

Рассмотрим алгебру Клиффорда, образующим пространством которой является плоскость, натянутая на базисные векторы

$$\varepsilon_1\,, \qquad \varepsilon_2\,.$$

Для них выполняется

$$(\varepsilon_1)^2 = \varepsilon_0\,, \qquad (\varepsilon_2)^2 = \varepsilon_0\,.$$

Произведение образующих базисных векторов определяет базисный вектор

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_1 \circ \varepsilon_2\,.$$

Для алгебры Клиффорда это произведение антикоммутативно, то есть меняет знак при перестановке сомножителей

$$\varepsilon_1 \circ \varepsilon_2 = -\varepsilon_2 \circ \varepsilon_1\,.$$

Умножение в рассматриваемой алгебре мы будем записывать следующим образом

$$\varepsilon_K \circ \varepsilon_I = \varepsilon_L\, C^L{}_{KI}\,.$$

В соответствии с регулярным представлением каждому базисному вектору можно поставить в соответствие структурную матрицу. В частности, базисному вектору ε_{12} в плоскости $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ можно поставить в соответствие матрицу

$$\varepsilon_{12} \sim \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array} .$$

Отрицательный знак перед единицей в последнем ряду является следствием антикоммутативности умножения.

Можно представить себе, что вышеприведенная матрица генетически связана с матрицей поворота в плоскости $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

$$\mathbf{U}(\varphi) \sim \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array} .$$

А именно матрица представления базисного вектора ε_{12} есть генератор группы поворотов

$$\varepsilon_{12} \sim K_\varphi = \frac{d\mathrm{U}}{d\varphi}\Big|_{\varphi=0} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array} .$$

Таким образом, приведенные соображения связывают антикоммутативность умножения в алгебре Клиффорда с круговыми поворотами в плоскостях образующего пространства. Отсюда становится понятным удобство алгебры Клиффорда при описании поворотов. Повороты уже запечатлены в алгебре Клиффорда с помощью антикоммутативности умножения.

Поэтому оператор

$$\mathcal{E}^{12}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

представляет собой оператор круговых поворотов в образующем пространстве (собственном пространстве-времени лептона). Применяя этот оператор к вектору действия, получим собственный момент импульса лептона или его *спин*.

Рассмотрев таким образом алгебру Клиффорда, обратимся к коммутативной алгебре. Рассмотрим коммутативную алгебру $\mathbb{C}^*$, образующим пространством которой является плоскость, натянутая на базисные векторы

$$\kappa_1\,, \qquad \kappa_2\,.$$

Для них выполняется

$$(\kappa_1)^2 = \kappa_0\,, \qquad (\kappa_2)^2 = \kappa_0\,.$$

Произведение образующих базисных векторов определяет базисный вектор

$$\kappa_{12} = \kappa_1 \circ \kappa_2\,.$$

Для коммутативной алгебры это произведение коммутативно, то есть не меняет знак при перестановке сомножителей

$$\kappa_1 \circ \kappa_2 = \kappa_2 \circ \kappa_1\,.$$

Умножение в рассматриваемой алгебре мы будем записывать следующим образом

$$\kappa_K \circ \kappa_I = \kappa_L\, C^L{}_{KI}\,.$$

В соответствии с регулярным представлением каждому базисному вектору можно поставить в соответствие структурную матрицу. В частности, базисному вектору κ_{12} в плоскости (κ_1, κ_2) можно поставить в соответствие матрицу

$$\kappa_{12} \sim \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array} .$$

Положительные знаки перед единицами являются следствием коммутативности умножения.

Можно представить себе, что вышеприведенная матрица генетически связана с матрицей *гиперболического* поворота в плоскости (κ_1, κ_2)

$$\mathbf{U}(\psi) \sim \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \cosh\psi & \sinh\psi \\ \sinh\psi & \cosh\psi \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array} .$$

А именно матрица представления базисного вектора κ_{12} есть генератор группы гиперболических поворотов

$$\kappa_{12} \sim K_\psi = \frac{d\mathrm{U}}{d\psi}\Big|_{\psi=0} = \begin{array}{|c|c|c} \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{2} & \\ \hline & 1 & 1 \\ \hline 1 & & 2 \\ \hline \end{array} \; .$$

Таким образом, приведенные соображения связывают коммутативность умножения в алгебре $\mathbb{C}^*$ с гиперболическими поворотами в плоскостях образующего пространства.*

Поэтому оператор

$$\kappa^{12}\,\frac{\partial}{\partial\psi}$$

представляет собой оператор гиперболических поворотов в образующем пространстве (собственном пространстве-времени лептино). Применяя этот оператор к вектору действия, получим новый динамический параметр, аналогичный спину лептонов. Этот параметр в свое время был назван нами *инерцией.* Таким образом, необходимо положить, что для лептино, то есть, частиц, векторы действия и векторы пространства-времени которых составляют коммутативную алгебру, спин равен нулю, а его место занимает новый, в некотором смысле симметричный спину динамический параметр – *инерция.* Из того обстоятельства, что спин гипотетических фундаментальных частиц – лептино равен нулю, следует, что эти частицы не являются кварками.

IV. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЛЕПТИНО

По алгоритму, указанному в Разделе III 1 вычислим структурные матрицы коммутативной алгебры $\mathbb{C}^*_4$. Вычисления выполним для следующей последовательности индексов

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124)\,.$$

1. Структурные матрицы коммутативной алгебры $\mathbb{C}^*_4$

При преобразовании матриц $C^L{}_{KI}$ от действительного представления к a-представлению использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$\mathit{1} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}\;, \qquad a = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}\;.$$

При преобразовании матриц $C^L{}_{KI}$ от a-представления к A-представлению использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$\mathbb{1} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}\;, \qquad A = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}\;.$$

$$\kappa_0 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline 32 & 1&&& & &&& & &&& & &&& \\ 13 & &1&& & &&& & &&& & &&& \\ 21 & &&1& & &&& & &&& & &&& \\ 0 & &&&1 & &&& & &&& & &&& \\ \hline 42 & &&& & 1&&& & &&& & &&& \\ 14 & &&& & &1&& & &&& & &&& \\ 1324 & &&& & &&1& & &&& & &&& \\ 34 & &&& & &&&1 & &&& & &&& \\ \hline 1 & &&& & &&& & 1&&& & &&& \\ 2 & &&& & &&& & &1&& & &&& \\ 3 & &&& & &&& & &&1& & &&& \\ 123 & &&& & &&& & &&&1 & &&& \\ \hline 134 & &&& & &&& & &&& & 1&&& \\ 234 & &&& & &&& & &&& & &1&& \\ 4 & &&& & &&& & &&& & &&1& \\ 124 & &&& & &&& & &&& & &&&1 \\ \hline \end{array}$$

$$= \mathit{1} \begin{array}{|cccc|cccc|c} \multicolumn{1}{c}{13} & 0 & 14 & \multicolumn{1}{c}{34} & 2 & 123 & 134 & \multicolumn{1}{c}{124} & \\ \hline 1&&& & &&& & 13 \\ &1&& & &&& & 0 \\ &&1& & &&& & 14 \\ &&&1 & &&& & 34 \\ \hline &&& & 1&&& & 2 \\ &&& & &1&& & 123 \\ &&& & &&1& & 234 \\ &&& & &&&1 & 124 \\ \hline \end{array} = \mathit{1} \begin{array}{|cc|cc|c} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{34} & 123 & \multicolumn{1}{c}{124} & \\ \hline \mathbb{1} & & & & 0 \\ & \mathbb{1} & & & 34 \\ \hline & & \mathbb{1} & & 123 \\ & & & \mathbb{1} & 124 \\ \hline \end{array}$$

$$\kappa_1 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline 32 & &&& & &&& & &&&1 & &&& \\ 13 & &&& & &&& & &&1& & &&& \\ 21 & &&& & &&& & &1&& & &&& \\ 0 & &&& & &&& & 1&&& & &&& \\ \hline 42 & &&& & &&& & &&& & &&&1 \\ 14 & &&& & &&& & &&& & &&1& \\ 1324 & &&& & &&& & &&& & &1&& \\ 34 & &&& & &&& & &&& & 1&&& \\ \hline 1 & &&&1 & &&& & &&& & &&& \\ 2 & &&1& & &&& & &&& & &&& \\ 3 & &1&& & &&& & &&& & &&& \\ 123 & 1&&& & &&& & &&& & &&& \\ \hline 134 & &&& & &&&1 & &&& & &&& \\ 234 & &&& & &&1& & &&& & &&& \\ 4 & &&& & &1&& & &&& & &&& \\ 124 & &&& & 1&&& & &&& & &&& \\ \hline \end{array}$$

$$= a \begin{array}{|cccc|cccc|c} \multicolumn{1}{c}{13} & 0 & 14 & \multicolumn{1}{c}{34} & 2 & 123 & 134 & \multicolumn{1}{c}{124} & \\ \hline &&& & &1&& & 13 \\ &&& & 1&&& & 0 \\ &&& & &&&1 & 14 \\ &&& & &&1& & 34 \\ \hline &1&& & &&& & 2 \\ 1&&& & &&& & 123 \\ &&&1 & &&& & 234 \\ &&1& & &&& & 124 \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|c} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{34} & 123 & \multicolumn{1}{c}{124} & \\ \hline & & A & & 0 \\ & & & A & 34 \\ \hline A & & & & 123 \\ & A & & & 124 \\ \hline \end{array}$$

---

*Движение точки по гиперболе можно рассматривать как результат падения точки на отталкивающий центр.

$$\kappa_2 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
13 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\
21 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\
0 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
14 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
1324 &&&&&&&&&&&&& 1 &&& \\
34 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\ \hline
1 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\
2 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
3 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
123 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
134 &&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\
234 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
4 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\
124 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= \mathit{1} \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&&&& 1 && \\
0 &&&&& 1 &&& \\
14 &&&&&&&& 1 \\
34 &&&&&&& 1 & \\ \hline
2 && 1 &&&&&& \\
123 & 1 &&&&&&& \\
234 &&&& 1 &&&& \\
124 &&& 1 &&&&& \\ \hline
\end{array} = \mathit{1} \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&& A & \\
34 &&&& A \\ \hline
123 & A &&& \\
124 && A && \\ \hline
\end{array}$$

$$\kappa_4 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&&&&& -1 && \\
13 &&&&&&&&&&&&& -1 &&& \\
21 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
0 &&&&&&&&&&&&&&& -1 & \\ \hline
42 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\
14 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\
1324 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\
34 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\ \hline
1 &&&&&& -1 &&&&&&&&&& \\
2 &&&&& -1 &&&&&&&&&&& \\
3 &&&&&&&& -1 &&&&&&&& \\
123 &&&&&&& -1 &&&&&&&&& \\ \hline
134 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\
234 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
4 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
124 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&&&&& -1 & \\
0 &&&&&&&& -1 \\
14 &&&&& 1 &&& \\
34 &&&&&& 1 && \\ \hline
2 &&& -1 &&&&& \\
123 &&&& -1 &&&& \\
234 & 1 &&&&&&& \\
124 && 1 &&&&&& \\ \hline
\end{array} = a \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&&& -\mathbb{1} \\
34 &&& \mathbb{1} & \\ \hline
123 && -\mathbb{1} && \\
124 & \mathbb{1} &&& \\ \hline
\end{array}$$

$$\kappa_3 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\
13 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\
21 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\
0 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
14 &&&&&&&&&&&&& 1 &&& \\
1324 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
34 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\ \hline
1 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\
2 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
3 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
123 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\ \hline
134 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\
234 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\
4 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
124 &&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&&& 1 &&& \\
0 &&&&&& 1 && \\
14 &&&&&&& 1 & \\
34 &&&&&&&& 1 \\ \hline
2 & 1 &&&&&&& \\
123 && 1 &&&&&& \\
234 &&& 1 &&&&& \\
124 &&&& 1 &&&& \\ \hline
\end{array} = a \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&& \mathbb{1} & \\
34 &&&& \mathbb{1} \\ \hline
123 & \mathbb{1} &&& \\
124 && \mathbb{1} && \\ \hline
\end{array}$$

$$\kappa_{21} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\
13 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
21 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
0 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\ \hline
42 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\
14 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\
1324 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
34 &&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\
2 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\
3 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\
123 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\ \hline
134 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
234 &&&&&&&&&&&&& 1 &&& \\
4 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
124 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 & 1 &&&&&&& \\
0 && 1 &&&&&& \\
14 &&& 1 &&&&& \\
34 &&&& 1 &&&& \\ \hline
2 &&&&& 1 &&& \\
123 &&&&&& 1 && \\
234 &&&&&&& 1 & \\
124 &&&&&&&& 1 \\ \hline
\end{array} = a \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & \mathbb{1} &&& \\
34 && \mathbb{1} && \\ \hline
123 &&& \mathbb{1} & \\
124 &&&& \mathbb{1} \\ \hline
\end{array}$$

$$\kappa_{13} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
13 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
21 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
14 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
1324 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
34 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
2 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
3 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
123 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
234 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
4 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
124 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= \mathit{1} \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & 1 & & & & & & & 13 \\
1 & & & & & & & & 0 \\
 & & & 1 & & & & & 14 \\
 & & 1 & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & 1 & & & 2 \\
 & & & & 1 & & & & 123 \\
 & & & & & & & 1 & 234 \\
 & & & & & & 1 & & 124 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
A & & & & 0 \\
 & A & & & 34 \\ \hline
 & & A & & 123 \\
 & & & A & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\kappa_{14} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & \text{-1} & & & & & & & & & \\
13 & & & & & & & & \text{-1} & & & & & & & & \\
21 & & & & & \text{-1} & & & & & & & & & & & \\
0 & & & & & & \text{-1} & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
14 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
1324 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
34 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & & & & \text{-1} & \\
2 & & & & & & & & & & & & & & & & \text{-1} \\
3 & & & & & & & & & & & & & \text{-1} & & & \\
123 & & & & & & & & & & & & & & \text{-1} & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
234 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
4 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
124 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= \mathit{1} \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & \text{-1} & & & & & 13 \\
 & & \text{-1} & & & & & & 0 \\
 & 1 & & & & & & & 14 \\
1 & & & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & & & \text{-1} & 2 \\
 & & & & & & \text{-1} & & 123 \\
 & & & & & 1 & & & 234 \\
 & & & & 1 & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & \text{-}A & & & 0 \\
A & & & & 34 \\ \hline
 & & & \text{-}A & 123 \\
 & & A & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\kappa_{32} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
13 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
14 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
34 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
2 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
123 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
234 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
124 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & 1 & & & & & & & 13 \\
1 & & & & & & & & 0 \\
 & & & 1 & & & & & 14 \\
 & & 1 & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & 1 & & & 2 \\
 & & & & 1 & & & & 123 \\
 & & & & & & & 1 & 234 \\
 & & & & & & 1 & & 124 \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
A & & & & 0 \\
 & A & & & 34 \\ \hline
 & & A & & 123 \\
 & & & A & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\kappa_{42} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & \text{-1} & & & & & & & & \\
13 & & & & & & & \text{-1} & & & & & & & & & \\
21 & & & & & & \text{-1} & & & & & & & & & & \\
0 & & & & & \text{-1} & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
14 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
1324 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
34 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & & & & & \text{-1} \\
2 & & & & & & & & & & & & & & & \text{-1} & \\
3 & & & & & & & & & & & & & & \text{-1} & & \\
123 & & & & & & & & & & & & & \text{-1} & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
234 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
4 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
124 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & \text{-1} & & & & & 13 \\
 & & \text{-1} & & & & & & 0 \\
 & 1 & & & & & & & 14 \\
1 & & & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & & & \text{-1} & 2 \\
 & & & & & & \text{-1} & & 123 \\
 & & & & & 1 & & & 234 \\
 & & & & 1 & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & \text{-}A & & & 0 \\
A & & & & 34 \\ \hline
 & & & \text{-}A & 123 \\
 & & A & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$
\kappa_{34} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
13 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
21 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
0 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\ \hline
42 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
14 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
1324 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
34 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
2 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\
3 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
123 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\ \hline
134 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
234 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
4 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
124 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= 1
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & -1 & & & & & & 13 \\
 & & & -1 & & & & & 0 \\
1 & & & & & & & & 14 \\
 & 1 & & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & & -1 & & 2 \\
 & & & & & & & -1 & 123 \\
 & & & & 1 & & & & 234 \\
 & & & & & 1 & & & 124 \\ \hline
\end{array}
= 1
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & -\mathbb{1} & & & 0 \\
\mathbb{1} & & & & 34 \\ \hline
 & & & -\mathbb{1} & 123 \\
 & & \mathbb{1} & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\kappa_{124} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
13 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\
21 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
0 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\ \hline
42 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
14 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
1324 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
34 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\ \hline
1 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
2 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
3 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
123 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\ \hline
134 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
234 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
4 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
124 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= 1
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & & & & -1 & & 13 \\
 & & & & & & & -1 & 0 \\
 & & & & 1 & & & & 14 \\
 & & & & & 1 & & & 34 \\ \hline
 & & -1 & & & & & & 2 \\
 & & & -1 & & & & & 123 \\
1 & & & & & & & & 234 \\
 & 1 & & & & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
= 1
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & & & -\mathbb{1} & 0 \\
 & & \mathbb{1} & & 34 \\ \hline
 & -\mathbb{1} & & & 123 \\
\mathbb{1} & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\kappa_{123} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
13 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
21 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
0 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
14 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
1324 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
34 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ \hline
1 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
2 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
3 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
123 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
234 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
4 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
124 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= 1
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & & 1 & & & & 13 \\
 & & & & & 1 & & & 0 \\
 & & & & & & 1 & & 14 \\
 & & & & & & & 1 & 34 \\ \hline
1 & & & & & & & & 2 \\
 & 1 & & & & & & & 123 \\
 & & 1 & & & & & & 234 \\
 & & & 1 & & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
= 1
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & & \mathbb{1} & & 0 \\
 & & & \mathbb{1} & 34 \\ \hline
\mathbb{1} & & & & 123 \\
 & \mathbb{1} & & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\kappa_{134} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
13 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
21 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\
0 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
14 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
1324 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
34 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
2 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
3 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
123 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\ \hline
134 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
234 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
4 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
124 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= a
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & & & & & -1 & 13 \\
 & & & & & & -1 & & 0 \\
 & & & & & 1 & & & 14 \\
 & & & & 1 & & & & 34 \\ \hline
 & & & -1 & & & & & 2 \\
 & & -1 & & & & & & 123 \\
 & 1 & & & & & & & 234 \\
1 & & & & & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & & & -A & 0 \\
 & & A & & 34 \\ \hline
 & -A & & & 123 \\
A & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$\kappa_{234} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
13 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
21 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
0 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\ \hline
42 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
14 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
1324 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
34 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
2 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
3 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
123 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\ \hline
134 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
234 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
4 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
124 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= 1 \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & & & & & -1 & 13 \\
 & & & & & & -1 & & 0 \\
 & & & & & 1 & & & 14 \\
 & & & & 1 & & & & 34 \\ \hline
 & & & -1 & & & & & 2 \\
 & & -1 & & & & & & 123 \\
 & 1 & & & & & & & 234 \\
1 & & & & & & & & 124 \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & & & -A & 0 \\
 & & A & & 34 \\ \hline
 & -A & & & 123 \\
A & & & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\kappa_{1324} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
13 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
21 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
0 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
14 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
34 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\
2 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
3 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
123 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
234 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
4 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
124 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & -1 & & & & & & 13 \\
 & & & -1 & & & & & 0 \\
1 & & & & & & & & 14 \\
 & 1 & & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & & -1 & & 2 \\
 & & & & & & & -1 & 123 \\
 & & & & 1 & & & & 234 \\
 & & & & & 1 & & & 124 \\ \hline
\end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & -\mathbb{1} & & & 0 \\
\mathbb{1} & & & & 34 \\ \hline
 & & & -\mathbb{1} & 123 \\
 & & \mathbb{1} & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

Мы получили структурные матрицы коммутативной алгебры $\mathbb{C}^*$ по такому же алгоритму, по которому в Лекции 3 были выведены матрицы Дирака. Обратим внимание на матрицу, представляющую базисный вектор κ_{21}. В a-представлении эта матрица имеет вид

$$C^L{}_{K(21)} = a \cdot \delta^L{}_K \, .$$

Эта матрица должна играть в теории лептино такую же роль, как матрица $i \cdot \delta^L{}_K$ в теории лептонов.

2. Действительное представление коммутативной алгебры $\mathbb{C}_4^*$

Действительное представление коммутативной алгебры $\mathbb{C}_4^*$ соответствует записи вектора ψ в следующем виде

$$\begin{aligned}
\psi = {} & \kappa_{32}\,\psi^{32} + \kappa_{13}\,\psi^{13} + \kappa_{21}\,\psi^{21} + \kappa_0\,\psi^0 + \\
& \kappa_{42}\,\psi^{42} + \kappa_{14}\,\psi^{14} + \kappa_{1324}\,\psi^{1324} + \kappa_{34}\,\psi^{34} + \\
& \kappa_1\,\psi^1 + \kappa_2\,\psi^2 + \kappa_3\,\psi^3 + \kappa_{123}\,\psi^{123} + \\
& \kappa_{134}\,\psi^{134} + \kappa_{234}\,\psi^{234} + \kappa_4\,\psi^4 + \kappa_{124}\,\psi^{124} \, .
\end{aligned}$$

В результате мы получили действительные матрицы 16×16 представления базисных векторов κ_I. (См. Раздел IV 1).

Помимо действительного представления будем использовать a-представление и A-представление базисных векторов коммутативной алгебры, удобные в силу своей компактности.

3. a-представление коммутативной алгебры $\mathbb{C}_4^*$

a-представление в этом случае основано на следующем разложении вектора:

$$\begin{aligned}
\psi = {} & \kappa_{13} \circ (\kappa_{21}\,\psi^{32} + \kappa_0\,\psi^{13}) + \kappa_0 \circ (\kappa_{21}\,\psi^{21} + \kappa_0\,\psi^0) + \\
& \kappa_{14} \circ (\kappa_{21}\,\psi^{42} + \kappa_0\,\psi^{14}) + \kappa_{34} \circ (\kappa_{21}\,\psi^{1324} + \kappa_0\,\psi^{34}) + \\
& \kappa_2 \circ (\kappa_{21}\,\psi^1 + \kappa_0\,\psi^2) + \kappa_{123} \circ (\kappa_{21}\,\psi^3 + \kappa_0\,\psi^{123}) + \\
& \kappa_{234} \circ (\kappa_{21}\,\psi^{134} + \kappa_0\,\psi^{234}) + \kappa_{124} \circ (\kappa_{21}\,\psi^4 + \kappa_0\,\psi^{124}) \, .
\end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{C}_4^*$ в виде произведения $\mathbb{C}_3^* \times \mathbb{C}_1^*$ (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_3^*$ являются

$$\kappa_{13}\,,\, \kappa_0\,,\, \kappa_{14}\,,\, \kappa_{34}\,,\, \kappa_2\,,\, \kappa_{123}\,,\, \kappa_{234}\,,\, \kappa_{124}\,;$$

базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_1^*$ являются

$$\kappa_{21}\,, \quad \kappa_0\,.$$

Как и прежде поставим в соответствие базисному вектору κ_{21} алгебры $\mathbb{C}_1^*$ a-единицу, а базисному вектору κ_0 действительную единицу. В результате получим вектор алгебры $\mathbb{C}_4^*$ в a-представлении имеет вид

$$\begin{aligned}
\psi = {} & \kappa_{13} \circ (a\,\psi^{32} + \psi^{13}) + \kappa_0 \circ (a\,\psi^{21} + \psi^0) + \\
& \kappa_{14} \circ (a\,\psi^{42} + \psi^{14}) + \kappa_{34} \circ (a\,\psi^{1324} + \psi^{34}) + \\
& \kappa_2 \circ (a\,\psi^1 + \psi^2) + \kappa_{123} \circ (a\,\psi^3 + \psi^{123}) + \\
& \kappa_{234} \circ (a\,\psi^{134} + \psi^{234}) + \kappa_{124} \circ (a\,\psi^4 + \psi^{124}) \, .
\end{aligned}$$

Таким образом, в a-представлении координаты (компоненты) вектора являются a-числами. Введем для них обозначение

$$
\begin{array}{llll}
\boldsymbol{\psi}^{13} = a\,\psi^{32} + \psi^{13}\,, & \boldsymbol{\psi}^{0} = a\,\psi^{21} + \psi^{0}\,, \\
\boldsymbol{\psi}^{14} = a\,\psi^{42} + \psi^{14}\,, & \boldsymbol{\psi}^{34} = a\,\psi^{1324} + \psi^{34}\,, \\
\boldsymbol{\psi}^{2} = a\,\psi^{1} + \psi^{2}\,, & \boldsymbol{\psi}^{123} = a\,\psi^{3} + \psi^{123}\,, \\
\boldsymbol{\psi}^{234} = a\,\psi^{134} + \psi^{234}\,, & \boldsymbol{\psi}^{124} = a\,\psi^{4} + \psi^{124}\,.
\end{array} \tag{9}
$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$
\psi = \kappa_{13}\,\boldsymbol{\psi}^{13} + \kappa_0\,\boldsymbol{\psi}^{0} + \kappa_{14}\,\boldsymbol{\psi}^{14} + \kappa_{34}\,\boldsymbol{\psi}^{34} + \kappa_2\,\boldsymbol{\psi}^{2} + \kappa_{123}\,\boldsymbol{\psi}^{123} + \kappa_{234}\,\boldsymbol{\psi}^{234} + \kappa_{124}\,\boldsymbol{\psi}^{124}\,.
$$

Отсюда видно, что в a-представлении вектор ψ проецируется на направления κ_{13}, κ_0,κ_{14}, κ_{34}, κ_2, κ_{123}, κ_{234}, κ_{124}.

a-представление базисных векторов дается структурными матрицами 8×8 (см. Раздел IV 1).

4. A-представление коммутативной алгебры $\mathbb{C}_4^*$

A-представление алгебры $\mathbb{C}_4^*$ основано на разложении вектора:

$$
\begin{aligned}
\psi = {} & (\kappa_{32}\,\psi^{32} + \kappa_{13}\,\psi^{13} + \kappa_{21}\,\psi^{21} + \kappa_0\,\psi^{0}) \circ \kappa_0 + \\
& (\kappa_{32}\,\psi^{42} + \kappa_{13}\,\psi^{14} + \kappa_{21}\,\psi^{1324} + \kappa_0\,\psi^{34}) \circ \kappa_{34} + \\
& (\kappa_{32}\,\psi^{1} + \kappa_{13}\,\psi^{2} + \kappa_{21}\,\psi^{3} + \kappa_0\,\psi^{123}) \circ \kappa_{123} + \\
& (\kappa_{32}\,\psi^{134} + \kappa_{13}\,\psi^{234} + \kappa_{21}\,\psi^{4} + \kappa_0\,\psi^{124}) \circ \kappa_{124}\,.
\end{aligned}
$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{C}_4^*$ в виде произведения $\mathbb{C}_2^* \times \mathbb{C}_2^*$. Базисными векторами одной алгебры $\mathbb{C}_2^*$ являются

$$
\kappa_0\,, \quad \kappa_{34}\,, \quad \kappa_{123}\,, \quad \kappa_{124}\,;
$$

базисными векторами другой алгебры $\mathbb{C}_2^*$ являются

$$
\kappa_{32}\,, \quad \kappa_{13}\,, \quad \kappa_{21}\,, \quad \kappa_0\,.
$$

Как и прежде заменяя базисные векторы κ_{32}, κ_{13},κ_{21}, κ_0 A-числами, получим вектор алгебры $\mathbb{C}_4^*$ в A-представлении

$$
\begin{aligned}
\psi = {} & (a \cdot A\,\psi^{32} + 1 \cdot A\,\psi^{13} + a \cdot \mathbb{1}\,\psi^{21} + 1 \cdot \mathbb{1}\,\psi^{0}) \circ \kappa_0 + \\
& (a \cdot A\,\psi^{42} + 1 \cdot A\,\psi^{14} + a \cdot \mathbb{1}\,\psi^{1324} + 1 \cdot \mathbb{1}\,\psi^{34}) \circ \kappa_{34} + \\
& (a \cdot A\,\psi^{1} + 1 \cdot A\,\psi^{2} + a \cdot \mathbb{1}\,\psi^{3} + 1 \cdot \mathbb{1}\,\psi^{123}) \circ \kappa_{123} + \\
& (a \cdot A\,\psi^{134} + 1 \cdot A\,\psi^{234} + a \cdot \mathbb{1}\,\psi^{4} + 1 \cdot \mathbb{1}\,\psi^{124}) \circ \kappa_{124}\,.
\end{aligned}
$$

Таким образом, в A-представлении координаты (компоненты) вектора являются A-числами. Введем для них обозначение

$$
\begin{aligned}
\Psi^{0} &= a\,A\,\psi^{32} + 1 \cdot A\,\psi^{13} + a\,\mathbb{1}\,\psi^{21} + 1 \cdot \mathbb{1}\,\psi^{0}\,, \\
\Psi^{34} &= a\,A\,\psi^{42} + 1 \cdot A\,\psi^{14} + a\,\mathbb{1}\,\psi^{1324} + 1 \cdot \mathbb{1}\,\psi^{34}\,, \\
\Psi^{123} &= a\,A\,\psi^{1} + 1 \cdot A\,\psi^{2} + a\,\mathbb{1}\,\psi^{3} + 1 \cdot \mathbb{1}\,\psi^{123}\,, \\
\Psi^{124} &= a\,A\,\psi^{134} + 1 \cdot A\,\psi^{234} + a\,\mathbb{1}\,\psi^{4} + 1 \cdot \mathbb{1}\,\psi^{124}\,.
\end{aligned} \tag{10}
$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$
\psi = \Psi^{0}\,\kappa_0 + \Psi^{34}\,\kappa_{34} + \Psi^{123}\,\kappa_{123} + \Psi^{124}\,\kappa_{124}\,.
$$

Отсюда видно, что в A-представлении вектор ψ проецируется на направления κ_0, κ_{34}, κ_{123}, κ_{124}.

A-представление базисных векторов дается структурными матрицами 4×4 (см. Раздел IV 1).

5. Сжатое представление коммутативной алгебры

При переходе к частным случаям квантовой теории целесообразно пользоваться процедурой сжатия, или вырождения слагаемых компонент вектора.

В этом разделе рассмотрим сжатое представление базисных векторов коммутативной алгебры $\mathbb{C}_n^*$ в ее подалгебре $\mathbb{C}_{n-k}^*$, где $k < n$. Для примера рассмотрим сжатое представление базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_n^*$ в ее подалгебре $\mathbb{C}_{n-1}^*$. Разобьем базисные векторы κ_I алгебры $\mathbb{C}_n^*$ на две группы κ_{I_1} и κ_{I_2} с одинаковым числом векторов так, чтобы векторы κ_{I_1} образовывали алгебру $\mathbb{C}_{n-1}^*$. В силу симметрий коммутативной алгебры соотношения (1) имеют вид

$$
\begin{aligned}
\kappa_{K_1} \circ \kappa_{I_1} &= \kappa_{L_1} \cdot C^{L_1}{}_{K_1 I_1}\,, && (11)\\
\kappa_{K_1} \circ \kappa_{I_2} &= \kappa_{L_2} \cdot C^{L_2}{}_{K_1 I_2}\,, && (12)\\
\kappa_{K_2} \circ \kappa_{I_1} &= \kappa_{L_2} \cdot C^{L_2}{}_{K_2 I_1}\,, \\
\kappa_{K_2} \circ \kappa_{I_2} &= \kappa_{L_1} \cdot C^{L_1}{}_{K_2 I_2}\,.
\end{aligned}
$$

Будем полагать, что приближенно при вычислении матриц представления базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_n^*$ в алгебре $\mathbb{C}_{n-1}^*$ базисные векторы κ_{L_2} в правой части уравнения (12) можно заменить на базисные векторы κ_{L_1} с помощью соотношения

$$
\kappa_{L_2} = \kappa_{L_1} \cdot P^{L_1}{}_{L_2}\,, \tag{13}
$$

где $P^{L_1}{}_{L_2}$ есть матрица соответствий. Тогда соотношение (12) принимает вид:

$$
\kappa_{K_1} \circ \kappa_{I_2} = \kappa_{L_1} \cdot P^{L_1}{}_{L_2} \cdot C^{L_2}{}_{K_1 I_2}\,. \tag{14}
$$

Соотношения (11) и (14) позволяют получить матрицы представления базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_n^*$ в ее подалгебре $\mathbb{C}_{n-1}^*$, причем базисные векторы подалгебры $\mathbb{C}_{n-1}^*$ представляются точно, а остальные базисные векторы – приближенно.

Аналогичным образом можно рассмотреть сжатое представление базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_n^*$ в ее подалгебре $\mathbb{C}_{n-k}^*$, где $k < n$.

1. Первое сжатое представление.

Рассмотрим первое сжатое представление

$$
R_1 : \mathbb{C}_4^* \to \mathbb{C}_3^*\,\{\kappa_{32}, \kappa_{13}, \kappa_{21}, \kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_{123}\}.
$$

Для этого положим, что при вычислении структурных матриц по формуле (14) соотношение (13) определяется тем, что базисные векторы с индексами

$$42, 14, 1324, 34, 134, 234, 4, 124$$

заменяются на базисные векторы с индексами

$$32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123$$

соответственно. Тогда размерность матриц базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_4^*$ понижается вдвое и равна 8×8 в действительном представлении, 4×4 в a-представлении и 2×2 в A-представлении.

В результате получим следующие структурные матрицы, соответствующие первому сжатому представлению базисных векторов коммутативной алгебры $\mathbb{C}_4^*$ в алгебре $\mathbb{C}_3^*$

$$\kappa_0 \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|} & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline \mathit{42} & 32 & 1&&&&&&& \\ \mathit{14} & 13 & &1&&&&&& \\ \mathit{1324} & 21 & &&1&&&&& \\ \mathit{34} & 0 & &&&1&&&& \\ \hline \mathit{134} & 1 & &&&&1&&& \\ \mathit{234} & 2 & &&&&&1&& \\ \mathit{4} & 3 & &&&&&&1& \\ \mathit{124} & 123 & &&&&&&&1 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline 1&&&& 13 \\ &1&&& 0 \\ \hline &&1&& 2 \\ &&&1& 123 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline \mathbb{1} & & 0 \\ \hline & \mathbb{1} & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\kappa_1 \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|} & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline \mathit{42} & 32 & &&&&&&&1 \\ \mathit{14} & 13 & &&&&&&1& \\ \mathit{1324} & 21 & &&&&&1&& \\ \mathit{34} & 0 & &&&&1&&& \\ \hline \mathit{134} & 1 & &&&1&&&& \\ \mathit{234} & 2 & &&1&&&&& \\ \mathit{4} & 3 & &1&&&&&& \\ \mathit{124} & 123 & 1&&&&&&& \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline &&&1& 13 \\ &&1&& 0 \\ \hline &1&&& 2 \\ 1&&&& 123 \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline & A & 0 \\ \hline A & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\kappa_2 \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|} & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline \mathit{42} & 32 & &&&&&&1& \\ \mathit{14} & 13 & &&&&&&&1 \\ \mathit{1324} & 21 & &&&&1&&& \\ \mathit{34} & 0 & &&&&&1&& \\ \hline \mathit{134} & 1 & &&1&&&&& \\ \mathit{234} & 2 & &&&1&&&& \\ \mathit{4} & 3 & 1&&&&&&& \\ \mathit{124} & 123 & &1&&&&&& \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline &&&1& 13 \\ &&1&& 0 \\ \hline &1&&& 2 \\ 1&&&& 123 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline & A & 0 \\ \hline A & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\kappa_3 \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|} & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline \mathit{42} & 32 & &&&&&1&& \\ \mathit{14} & 13 & &&&&1&&& \\ \mathit{1324} & 21 & &&&&&&&1 \\ \mathit{34} & 0 & &&&&&&1& \\ \hline \mathit{134} & 1 & &1&&&&&& \\ \mathit{234} & 2 & 1&&&&&&& \\ \mathit{4} & 3 & &&&1&&&& \\ \mathit{124} & 123 & &&1&&&&& \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline &&1&& 13 \\ &&&1& 0 \\ \hline 1&&&& 2 \\ &1&&& 123 \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline & \mathbb{1} & 0 \\ \hline \mathbb{1} & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\kappa_4 \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|} & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline \mathit{42} & 32 & &&&&&1&& \\ \mathit{14} & 13 & &&&&1&&& \\ \mathit{1324} & 21 & &&&&&&&1 \\ \mathit{34} & 0 & &&&&&&1& \\ \hline \mathit{134} & 1 & &1&&&&&& \\ \mathit{234} & 2 & 1&&&&&&& \\ \mathit{4} & 3 & &&&1&&&& \\ \mathit{124} & 123 & &&1&&&&& \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline &&1&& 13 \\ &&&1& 0 \\ \hline 1&&&& 2 \\ &1&&& 123 \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline & \mathbb{1} & 0 \\ \hline \mathbb{1} & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\kappa_{21} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|} & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline \mathit{42} & 32 & &1&&&&&& \\ \mathit{14} & 13 & 1&&&&&&& \\ \mathit{1324} & 21 & &&&1&&&& \\ \mathit{34} & 0 & &&1&&&&& \\ \hline \mathit{134} & 1 & &&&&&1&& \\ \mathit{234} & 2 & &&&&1&&& \\ \mathit{4} & 3 & &&&&&&&1 \\ \mathit{124} & 123 & &&&&&&1& \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline 1&&&& 13 \\ &1&&& 0 \\ \hline &&1&& 2 \\ &&&1& 123 \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline \mathbb{1} & & 0 \\ \hline & \mathbb{1} & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\kappa_{13} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|} & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline \mathit{42} & 32 & &&1&&&&& \\ \mathit{14} & 13 & &&&1&&&& \\ \mathit{1324} & 21 & 1&&&&&&& \\ \mathit{34} & 0 & &1&&&&&& \\ \hline \mathit{134} & 1 & &&&&&&1& \\ \mathit{234} & 2 & &&&&&&&1 \\ \mathit{4} & 3 & &&&&1&&& \\ \mathit{124} & 123 & &&&&&1&& \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline &1&&& 13 \\ 1&&&& 0 \\ \hline &&&1& 2 \\ &&1&& 123 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline A & & 0 \\ \hline & A & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\kappa_{32} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|} & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline \mathit{42} & 32 & &&&1&&&& \\ \mathit{14} & 13 & &&1&&&&& \\ \mathit{1324} & 21 & &1&&&&&& \\ \mathit{34} & 0 & 1&&&&&&& \\ \hline \mathit{134} & 1 & &&&&&&&1 \\ \mathit{234} & 2 & &&&&&&1& \\ \mathit{4} & 3 & &&&&&1&& \\ \mathit{124} & 123 & &&&&1&&& \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline &1&&& 13 \\ 1&&&& 0 \\ \hline &&&1& 2 \\ &&1&& 123 \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline A & & 0 \\ \hline & A & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\kappa_{14} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|} & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline \mathit{42} & 32 & &&1&&&&& \\ \mathit{14} & 13 & &&&1&&&& \\ \mathit{1324} & 21 & 1&&&&&&& \\ \mathit{34} & 0 & &1&&&&&& \\ \hline \mathit{134} & 1 & &&&&&&1& \\ \mathit{234} & 2 & &&&&&&&1 \\ \mathit{4} & 3 & &&&&1&&& \\ \mathit{124} & 123 & &&&&&1&& \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline &1&&& 13 \\ 1&&&& 0 \\ \hline &&&1& 2 \\ &&1&& 123 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline A & & 0 \\ \hline & A & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\kappa_{42} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|} & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline \mathit{42} & 32 & &&&1&&&& \\ \mathit{14} & 13 & &&1&&&&& \\ \mathit{1324} & 21 & &1&&&&&& \\ \mathit{34} & 0 & 1&&&&&&& \\ \hline \mathit{134} & 1 & &&&&&&&1 \\ \mathit{234} & 2 & &&&&&&1& \\ \mathit{4} & 3 & &&&&&1&& \\ \mathit{124} & 123 & &&&&1&&& \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline &1&&& 13 \\ 1&&&& 0 \\ \hline &&&1& 2 \\ &&1&& 123 \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline A & & 0 \\ \hline & A & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\kappa_{34} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|} & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline \mathit{42} & 32 & 1&&&&&&& \\ \mathit{14} & 13 & &1&&&&&& \\ \mathit{1324} & 21 & &&1&&&&& \\ \mathit{34} & 0 & &&&1&&&& \\ \hline \mathit{134} & 1 & &&&&1&&& \\ \mathit{234} & 2 & &&&&&1&& \\ \mathit{4} & 3 & &&&&&&1& \\ \mathit{124} & 123 & &&&&&&&1 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline 1&&&& 13 \\ &1&&& 0 \\ \hline &&1&& 2 \\ &&&1& 123 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline \mathbb{1} & & 0 \\ \hline & \mathbb{1} & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\kappa_{123} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|} & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline \mathit{42} & 32 & &&&&1&&& \\ \mathit{14} & 13 & &&&&&1&& \\ \mathit{1324} & 21 & &&&&&&1& \\ \mathit{34} & 0 & &&&&&&&1 \\ \hline \mathit{134} & 1 & 1&&&&&&& \\ \mathit{234} & 2 & &1&&&&&& \\ \mathit{4} & 3 & &&1&&&&& \\ \mathit{124} & 123 & &&&1&&&& \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline &&1&& 13 \\ &&&1& 0 \\ \hline 1&&&& 2 \\ &1&&& 123 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline & \mathbb{1} & 0 \\ \hline \mathbb{1} & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$
\kappa_{124}\quad
\begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & & & & & 1 & & & \\
\mathit{14} & 13 & & & & & & 1 & & \\
\mathit{1324} & 21 & & & & & & & 1 & \\
\mathit{34} & 0 & & & & & & & & 1 \\ \hline
\mathit{134} & 1 & 1 & & & & & & & \\
\mathit{234} & 2 & & 1 & & & & & & \\
\mathit{4} & 3 & & & 1 & & & & & \\
\mathit{124} & 123 & & & & 1 & & & & \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & 1 & & 13 \\
 & & & 1 & 0 \\ \hline
1 & & & & 2 \\
 & 1 & & & 123 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & \mathbb{1} & 0 \\ \hline
\mathbb{1} & & 123 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\kappa_{134} \sim
\begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & & & & & & & & 1 \\
\mathit{14} & 13 & & & & & & & 1 & \\
\mathit{1324} & 21 & & & & & & 1 & & \\
\mathit{34} & 0 & & & & & 1 & & & \\ \hline
\mathit{134} & 1 & & & & 1 & & & & \\
\mathit{234} & 2 & & & 1 & & & & & \\
\mathit{4} & 3 & & 1 & & & & & & \\
\mathit{124} & 123 & 1 & & & & & & & \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & & 1 & 13 \\
 & & 1 & & 0 \\ \hline
 & 1 & & & 2 \\
1 & & & & 123 \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & A & 0 \\ \hline
A & & 123 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\kappa_{234} \sim
\begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & & & & & & & 1 & \\
\mathit{14} & 13 & & & & & & & & 1 \\
\mathit{1324} & 21 & & & & & 1 & & & \\
\mathit{34} & 0 & & & & & & 1 & & \\ \hline
\mathit{134} & 1 & & & 1 & & & & & \\
\mathit{234} & 2 & & & & 1 & & & & \\
\mathit{4} & 3 & 1 & & & & & & & \\
\mathit{124} & 123 & & 1 & & & & & & \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & & 1 & 13 \\
 & & 1 & & 0 \\ \hline
 & 1 & & & 2 \\
1 & & & & 123 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & A & 0 \\ \hline
A & & 123 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\kappa_{1324} \sim
\begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & & 1 & & & & & & \\
\mathit{14} & 13 & 1 & & & & & & & \\
\mathit{1324} & 21 & & & & 1 & & & & \\
\mathit{34} & 0 & & & 1 & & & & & \\ \hline
\mathit{134} & 1 & & & & & & 1 & & \\
\mathit{234} & 2 & & & & & 1 & & & \\
\mathit{4} & 3 & & & & & & & & 1 \\
\mathit{124} & 123 & & & & & & & 1 & \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
1 & & & & 13 \\
 & 1 & & & 0 \\ \hline
 & & 1 & & 2 \\
 & & & 1 & 123 \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
\mathbb{1} & & 0 \\ \hline
 & \mathbb{1} & 123 \\ \hline
\end{array}
$$

В первом сжатом представлении восемь структурных матриц алгебры $\mathbb{C}_4^*$, соответствующих базисным векторам

$$\kappa_{34},\quad \kappa_{134},\quad \kappa_{234},\quad \kappa_{4},\quad \kappa_{1324},\quad \kappa_{14},\quad \kappa_{42},\quad \kappa_{124}\,,$$

отождествляются с матрицами, соответствующими базисным векторам

$$\kappa_{0},\quad \kappa_{1},\quad \kappa_{2},\quad \kappa_{3},\quad \kappa_{21},\quad \kappa_{13},\quad \kappa_{32},\quad \kappa_{123}\,.$$

Представление первых восьми матриц является неточным вплоть до того, что сигнатура этих базисных векторов меняет знак.

В дальнейшем окажется важным то, что в первом сжатом представлении матрица ${C^L}_{K34}$ отождествляется с матрицей ${C^L}_{K0} = {\delta^L}_K$.

2. Второе сжатое представление.

Рассмотрим второе сжатое представление

$$R_2 : \mathbb{C}_4^* \to \mathbb{C}_2^*\,\{\kappa_{32}, \kappa_{13}, \kappa_{21}, \kappa_0\}.$$

Для этого положим, что при вычислении структурных матриц по формуле (14) соотношение (13) определяется тем, что базисные векторы с индексами $(42, 14, 1324, 34)$, $(134, 234, 4, 124)$ и $(1, 2, 3, 123)$ заменяются на базисные векторы с индексами $(32, 13, 21, 0)$ соответственно. Тогда размерность матриц представления базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_4^*$ понижается вдвое в сравнении с первым сжатым представлением и равна 4×4 в действительном представлении, 2×2 в a-представлении и 1×1 в A-представлении.

Ограничимся тем, что приведем матрицы регулярного представления образующих базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_4^*$ в алгебре $\mathbb{C}_2^*$. Имеем

$$
\kappa_1 \sim
\begin{array}{cc|cc|cc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline
\mathit{1} & 32 & & & & 1 \\
\mathit{2} & 13 & & & 1 & \\ \hline
\mathit{3} & 21 & & 1 & & \\
\mathit{123} & 0 & 1 & & & \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|c|c|}
\hline
 & 1 \\ \hline
1 & \\ \hline
\end{array}
= a\,A
$$

$$
\kappa_2 \sim
\begin{array}{cc|cc|cc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline
\mathit{1} & 32 & & & 1 & \\
\mathit{2} & 13 & & & & 1 \\ \hline
\mathit{3} & 21 & 1 & & & \\
\mathit{123} & 0 & & 1 & & \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{|c|c|}
\hline
 & 1 \\ \hline
1 & \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}\,A
$$

$$
\kappa_3 \sim
\begin{array}{cc|cc|cc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline
\mathit{1} & 32 & & 1 & & \\
\mathit{2} & 13 & 1 & & & \\ \hline
\mathit{3} & 21 & & & & 1 \\
\mathit{123} & 0 & & & 1 & \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|c|c|}
\hline
1 & \\ \hline
 & 1 \\ \hline
\end{array}
= a\,\mathbb{1}
$$

$$
\kappa_4 \sim
\begin{array}{cc|cc|cc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline
\mathit{134} & 32 & & 1 & & \\
\mathit{234} & 13 & 1 & & & \\ \hline
\mathit{4} & 21 & & & & 1 \\
\mathit{124} & 0 & & & 1 & \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|c|c|}
\hline
1 & \\ \hline
 & 1 \\ \hline
\end{array}
= a\,\mathbb{1}
$$

В результате для базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_4^*$ получим

$$
\begin{array}{cc}
\kappa_{32} \sim a\,A\,, & \kappa_{42} \sim a\,A\,, \\
\kappa_{13} \sim \mathit{1}\,A\,, & \kappa_{14} \sim \mathit{1}\,A\,, \\
\kappa_{21} \sim a\,\mathbb{1}\,, & \kappa_{1324} \sim a\,\mathbb{1}\,, \\
\kappa_{0} \sim \mathit{1}\,\mathbb{1}\,, & \kappa_{34} \sim \mathit{1}\,\mathbb{1}\,, \\
 & \\
\kappa_{1} \sim a\,A\,, & \kappa_{134} \sim a\,A\,, \\
\kappa_{2} \sim \mathit{1}\,A\,, & \kappa_{234} \sim \mathit{1}\,A\,, \\
\kappa_{3} \sim a\,\mathbb{1}\,, & \kappa_{4} \sim a\,\mathbb{1}\,, \\
\kappa_{123} \sim \mathit{1}\,\mathbb{1}\,, & \kappa_{124} \sim \mathit{1}\,\mathbb{1}\,.
\end{array}
$$

В этом представлении только базисные векторы κ_{32}, κ_{13}, κ_{21}, κ_0 представлены точно. Соотношения

$$
\begin{array}{c}
\kappa_{32} \sim a\,A\,, \\
\kappa_{13} \sim \mathit{1}\,A\,, \\
\kappa_{21} \sim a\,\mathbb{1}\,, \\
\kappa_{0} \sim \mathit{1}\,\mathbb{1}
\end{array}
$$

можно рассматривать как соответствие между указанными базисными векторами и A-числами.

3. Третье сжатое представление

Рассмотрим третье сжатое представление

$$R_3 : \mathbb{C}_4^* \to \mathbb{C}_1^* \{\kappa_{21}, \kappa_0\}\,.$$

Для этого положим, что соотношение (13) определяется тем, что базисные векторы с индексами $(42,14)$, $(1324,34)$, $(134,234)$, $(4,124)$, $(1,2)$, $(3,123)$, $(32,13)$ заменяются на векторы с индексами $(21,0)$ соответственно. Тогда размерность матриц базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_4^*$ понижается вдвое в сравнении с вторым сжатым представлением и равна 2×2 в действительном представлении, 1×1 в a-представлении. В результате для базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_4^*$ получим

$$\begin{array}{llll}
\kappa_{32}\sim a\,, & \kappa_1\sim a\,, & \kappa_{42}\sim a\,, & \kappa_{134}\sim a\,,\\
\kappa_{13}\sim 1\,, & \kappa_2\sim 1\,, & \kappa_{14}\sim 1\,, & \kappa_{234}\sim 1\,,\\
\kappa_{21}\sim a\,, & \kappa_3\sim a\,, & \kappa_{1324}\sim a\,, & \kappa_4\sim a\,,\\
\kappa_0\sim 1\,, & \kappa_{123}\sim 1\,, & \kappa_{34}\sim 1\,, & \kappa_{124}\sim 1
\end{array}$$

В рассматриваемом представлении вектор κ_{21} и только он представляется точно a-единицей.

V. УРАВНЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ ЛЕПТИНО

Мы вычислили структурные матрицы коммутативной алгебры действия и теперь вернемся к результатам Лекции 1. Согласно этой Лекции: если действие некоторого объекта является алгеброй, то такому объекту присущи квантовые явления, а уравнения структуры этой алгебры можно рассматривать как квантовые постулаты. Квантовые постулаты для произвольной алгебры действия были записаны следующим образом

$$\partial_M \psi^L = \frac{1}{S_0}\, C^L{}_{KI}\cdot p^I{}_M\cdot\psi^K\,. \tag{15}$$

Здесь ∂_M – оператор дифференцирования по обобщенной координате, $p^I{}_M$ – координаты обобщенного импульса, $C^L{}_{KI}$ – структурные постоянные алгебры действия, S_0 – действительная постоянная величина, имеющая размерность действия. В последующих Лекциях мы ввели алгебру Клиффорда как алгебру действия и связали ее с лептонами. При этом постоянную величину S_0 мы отождествили с постоянной Планка. Если бы нам удалось найти несколько алгебр действия, то мы имели бы несколько объектов, подчиняющихся квантовым явлениям разного типа.

Теперь мы ввели новый объект – лептино, которому сопоставили свою алгебру действия – коммутативную алгебру. И согласно предыдущему лептино подчиняются своей квантовой теории. Уравнения (15) будут квантовыми постулатами для лептино, если в них положить постоянные $C^L{}_{KI}$ равными структурным постоянным коммутативной алгебры и установить значение S_0. При этом возникает вопрос: нужно ли связывать постоянную Планка только с лептонами и соответственно с алгеброй Клиффорда, а для алгебры лептино вводить другую постоянную с размерностью действия, или постоянная Планка является универсальной? A priori ответить на этот вопрос нельзя. Поэтому для лептино мы введем свою постоянную действия, значение которой предстоит установить, и обозначим ее через l.

Аналогично Разделу II Лекции 9 придадим соотношению (15) форму уравнения Дирака. Для этого умножим его обе части на структурные константы $C^{MN}{}_L$. Получим

$$C^{MN}{}_L\cdot\partial_M\psi^L(x) = \frac{1}{l}\, C^{MN}{}_L\cdot C^L{}_{KI}\cdot p^I{}_M\cdot\psi^K\,. \tag{16}$$

С нашей точки зрения это уравнение и есть уравнение релятивистской квантовой механики для лептино в самом общем виде. Далее, повторяя рассуждения Раздела II Лекции 9, запишем это уравнение при следующих ограничениях: дифференцирование выполняется только по координатам образующего пространства и условии, что в первом сжатом представлении коэффициент при волновой функции в правой части принимает вид

$$-\frac{\mathrm{m}\,c}{l}\,.$$

Здесь m есть масса лептино. В результате получим следующее уравнение

$$\begin{aligned}&C^{mN}{}_L\cdot\partial_m\psi^L(x) =\\ &-\frac{\mathrm{m}\,c}{2\,l}\,(C^{0N}{}_L + C^{34N}{}_L)\cdot(C^L{}_{K0}+C^L{}_{K34})\cdot\psi^K\,.\end{aligned} \tag{17}$$

Понятно, что здесь $C^{0N}{}_K = C^N{}_{K0} = \delta^N{}_K$ в отличие от $C^N{}_{K34}$ и $C^{34N}{}_L$. Мы положили, что

$$p^0{}_0 = p^{34}{}_0 = p^0{}_{34} = p^{34}{}_{34} = -\frac{\mathrm{m}\,c}{2}\,.$$

Для действительного регулярного представления коммутативной алгебры $\mathbb{C}^*$ компоненты волновой функции $\psi^K(x)$ представляют собой шестнадцать действительных функций. В a-представлении волновая функция содержит восемь компонент вида:

$$\begin{array}{ll}
\boldsymbol{\psi}^{13} = a\,\psi^{32}+\psi^{13}\,, & \boldsymbol{\psi}^{0} = a\,\psi^{21}+\psi^{0}\,,\\
\boldsymbol{\psi}^{14} = a\,\psi^{42}+\psi^{14}\,, & \boldsymbol{\psi}^{34} = a\,\psi^{1324}+\psi^{34}\,,\\
\boldsymbol{\psi}^{2} = a\,\psi^{1}+\psi^{2}\,, & \boldsymbol{\psi}^{123} = a\,\psi^{3}+\psi^{123}\,,\\
\boldsymbol{\psi}^{234} = a\,\psi^{134}+\psi^{234}\,, & \boldsymbol{\psi}^{124} = a\,\psi^{4}+\psi^{124}\,.
\end{array} \tag{18}$$

И в A-представлении компонентами волновой функции являются четыре A-функции вида:

$$
\begin{aligned}
\Psi^{0} &= a\,A\,\psi^{32} + A\,\psi^{13} + a\,\psi^{21} + \psi^{0}\,,\\
\Psi^{34} &= a\,A\,\psi^{42} + A\,\psi^{14} + a\,\psi^{1324} + \psi^{34}\,,\\
\Psi^{123} &= a\,A\,\psi^{1} + A\,\psi^{2} + a\,\psi^{3} + \psi^{123}\,,\\
\Psi^{124} &= a\,A\,\psi^{134} + A\,\psi^{234} + a\,\psi^{4} + \psi^{124}\,.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Приведем структурные матрицы $C^{4N}{}_L$, $C^{1N}{}_L$, $C^{2N}{}_L$, $C^{3N}{}_L$, $C^{N}{}_{K34}$ и $C^{34N}{}_L$ в A-представлении, необходимые для построения уравнения релятивистской квантовой механики для свободных лептино.

$$
C^{4N}{}_L = a \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 0 & 34 & 123 & 124 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & -1 & \\ \hline & 1 & & \\ -1 & & & \end{array}\right] & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \end{array},
\qquad
C^{1N}{}_L = a \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 0 & 34 & 123 & 124 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cc|cc} & & A & \\ & & & A \\ \hline A & & & \\ & A & & \end{array}\right] & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \end{array},
$$

$$
C^{2N}{}_L = 1 \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 0 & 34 & 123 & 124 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cc|cc} & & A & \\ & & & A \\ \hline A & & & \\ & A & & \end{array}\right] & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \end{array},
\qquad
C^{3N}{}_L = a \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 0 & 34 & 123 & 124 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right] & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \end{array},
$$

$$
C^{34N}{}_L = 1 \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 0 & 34 & 123 & 124 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cc|cc} & \mathbb{1} & & \\ -\mathbb{1} & & & \\ \hline & & & \mathbb{1} \\ & & -\mathbb{1} & \end{array}\right] & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \end{array},
\quad
C^{N}{}_{K34} = 1 \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 0 & 34 & 123 & 124 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cc|cc} & -\mathbb{1} & & \\ \mathbb{1} & & & \\ \hline & & & -\mathbb{1} \\ & & \mathbb{1} & \end{array}\right] & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \end{array}.
$$

Далее, используя приведенные матрицы, приведем уравнения квантовой механики по отношению к A-компонентам волновой функции лептино:

$$
\left(a \left[\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & -1 & \\ \hline & 1 & & \\ -1 & & & \end{array}\right] \partial_4 + a \left[\begin{array}{cc|cc} & & A & \\ & & & A \\ \hline A & & & \\ & A & & \end{array}\right] \partial_1 + \right.
$$

$$
\left. \left[\begin{array}{cc|cc} & & A & \\ & & & A \\ \hline A & & & \\ & A & & \end{array}\right] \partial_2 + a \left[\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right] \partial_3 \right) \left\| \begin{array}{c} \Psi^{0} \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} \right\|
$$

$$
= -\frac{\mathrm{m}\,c}{l} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right] \left\| \begin{array}{c} \Psi^{0} \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} \right\|
$$

Или

$$
\begin{aligned}
a\,\partial_4\Psi^{124} &+ (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + a\,\partial_3)\Psi^{123} = -\frac{\mathrm{m}\,c}{l}\,\Psi^{0}\,,\\
-a\,\partial_4\Psi^{123} &+ (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + a\,\partial_3)\Psi^{124} = -\frac{\mathrm{m}\,c}{l}\,\Psi^{34}\,,\\
a\,\partial_4\Psi^{34} &+ (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + a\,\partial_3)\Psi^{0} = -\frac{\mathrm{m}\,c}{l}\,\Psi^{123}\,,\\
-a\,\partial_4\Psi^{0} &+ (a\,A\,\partial_1 + A\,\partial_2 + a\,\partial_3)\Psi^{34} = -\frac{\mathrm{m}\,c}{l}\,\Psi^{124}\,.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Есть ли в этом уравнении доля истины покажет будущее.

VI. ВЫВОДЫ.

- Одним из возможных путей обобщения алгебры Клиффорда является отказ от антикоммутативности умножения.
- Коммутативной алгебре действия и пространства-времени $\mathbb{C}^*$ ставятся в соответствие гипотетические фундаментальные частицы – *лептино.*
- В нерелятивистском приближении лептино и антилептино это одна и та же частица.
- В геометрическом пространстве лептино отсутствуют круговые повороты. Вместо них имеют место гиперболические повороты (вместо движений по окружности имеют место движения по гиперболе). Оператору гиперболических поворотов в образующем пространстве (собственном пространстве-времени лептино) соответствует новый динамический параметр, аналогичный спину лептонов. Этот параметр назван *инерцией.* Таким образом, для лептино (т.е. для частиц, векторы действия и векторы пространства-времени которых составляют коммутативную алгебру), спин равен нулю, а его место занимает новый, в некотором смысле симметричный спину динамический параметр – *инерция.*
- Лептино не могут быть отождествлены с кварками.
- Из алгебраической структуры векторов действия лептино следуют квантовые постулаты и теория квантовых явлений этих частиц. В общем случае нет оснований считать, что квантовые явления с участием лептино определяются постоянной Планка, а не другой постоянной величиной, имеющей размерность действия.